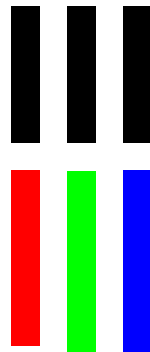


Appunti di Analisi



RACCOLTA DEGLI APPUNTI DEL CORSO TENUTOSI AL POLITECNICO DI MILANO DAL PROFESSOR FILIPPO
GAZZOLA NELL'ANNO ACCADEMICO 2017 2018 PER IL CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA MATEMATICA
\author GABRIELE GABRIELLI \cdot FABRIZIO BERNARDI \cdot GIOELE CERRI \cdot BRUNO GUINDANI \cdot
SIMONE POLITO \cdot AURELIO RAFFA \cdot CARLO VITELLIO

Premessa

Questo testo è una rielaborazione degli appunti del corso di Analisi III tenuto dal professor Filippo Gazzola per il corso di studi in Ingegneria Matematica, nell'anno accademico 2017/2018, presso il Politecnico di Milano.

Hanno contribuito alla redazione Fabrizio Bernardi, Gioele Cerri, Gabriele Gabrielli, Bruno Guindani, Simone Polito, Aurelio Raffa e Carlo Vitellio. La stesura finale è stata curata da Gabriele Gabrielli.

Questo testo non rappresenta un sostituto né alla lettura dei testi consigliati né alla frequentazione del corso. Non possiamo garantire l'assoluta correttezza del contenuto, anzi "non abbiamo potuto fare a meno" di inserire qualche errore (voluti eh) per testare l'attenzione del lettore. Abbiamo deciso di pubblicare questo materiale solo perché riteniamo che potrebbe risultare utile per un confronto critico. Sta dunque al lettore farne un uso adeguato.

Per segnalare refusi e inesattezze, oppure inviarci critiche e suggerimenti, potete contattarci a info@fubinitonelli.it.

File prodotto il 26 gennaio 2019 - Revisione 192c01e3d7e4dc250b3c5fcb3431c32af6c11db3

Indice

Premessa	3
1 Analisi complessa	7
1.1 Funzioni complesse di variabile complessa	7
1.1.1 Numeri complessi	7
1.1.2 Funzioni	7
1.1.3 Limiti, continuità e derivabilità	7
1.1.4 Differenziabilità	8
1.1.5 Condizioni di monogeneità	8
1.1.6 Funzioni armoniche	9
1.2 Estensione di funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{C}	10
1.2.1 Logaritmo complesso	11
1.3 Integrali di linea	13
1.3.1 Definizione e concetti generali	13
1.3.2 Teorema dell'integrale nullo e formula integrale di Cauchy	14
1.3.3 Funzioni analitiche, teorema di Weierstrass e formula delle derivate	16
1.4 Serie di Laurent	17
1.4.1 Singolarità e teorema di Laurent	17
1.4.2 Classificazione delle Singolarità	18
1.4.3 Punto all'infinito	19
1.4.4 Caratterizzazione di Poli e Singolarità Essenziali	20
1.5 Teorema dei residui	21
1.5.1 Residuo dell'infinito	21
1.5.2 Calcolo dei residui	22
1.5.3 Lemmi di Jordan	23
2 Analisi funzionale I	26
2.1 Misura e integrale di Lebesgue	26
2.1.1 Misura di Lebesgue	26
2.1.2 Funzioni Misurabili	28
2.1.3 Integrale di Lebesgue	28
2.1.4 Teoremi sull'integrale di Lebesgue	29
2.2 Spazi funzionali	30
2.2.1 Spazi vettoriali, normati e metrici	30
2.2.2 Spazi di Banach	31
2.2.3 Spazi di Hilbert	32
2.2.4 Spazio ℓ^2	33
2.2.5 Spazi L^p	34
2.2.6 Disuguaglianza di Hölder	35
2.2.7 Caratteristiche degli spazi L^p	37
2.3 Funzioni Test e Distribuzioni	38
2.3.1 Funzioni test e spazio \mathcal{D}	38
2.3.2 Convergenza in \mathcal{D}	39
2.3.3 Spazi L^p_{loc}	40
2.3.4 Distribuzioni e spazio \mathcal{D}'	41
2.3.5 Delta di Dirac	42
2.3.6 Convergenza in \mathcal{D}'	43
2.3.7 Valore principale	45
2.3.8 Funzioni a decrescita rapida e distribuzioni temperate	45
3 Serie di Fourier e trasformate integrali	47
3.1 Serie di Fourier	47
3.1.1 Base ortonormale	47
3.1.2 Coefficienti di Fourier	47
3.1.3 Uguaglianza di Parseval	49
3.1.4 Convergenza	49
3.1.5 Forma esponenziale	51

3.2	Trasformata di Fourier	52
3.2.1	Definizione	52
3.2.2	Continuità della trasformata	52
3.2.3	Proprietà	53
3.2.4	Convoluzione	55
3.2.5	Antitrasformata	56
3.2.6	Teorema di Plancherel e altre proprietà	56
3.2.7	Trasformata in \mathcal{S}'	58
3.2.8	Risoluzione di equazioni differenziali	59
3.2.9	Relazione tra serie e trasformata di Fourier	60
3.3	Trasformata di Laplace	61
3.3.1	Definizione	61
3.3.2	Proprietà	61
3.3.3	Derivazione	63
3.3.4	Convoluzione	65
3.3.5	Antitrasformata	66
	Prontuario salvavita dello studente	68
	Topologia e insiemistica	68
	Analisi	68
	Serie di potenze	69

1 Analisi complessa

L'analisi complessa consiste nello studio dei metodi del calcolo infinitesimale applicati alle funzioni che hanno per dominio e codominio insiemi di numeri complessi. Studiarla è utile per due motivi. Il primo sta nel fatto che molti modelli matematici e molte applicazioni ingegneristiche richiedono l'utilizzo dei numeri complessi. Il secondo motivo risiede nella semplificazione che certe tecniche di analisi complessa operano su alcuni problemi tipici dell'analisi di funzioni reali.

1.1 Funzioni complesse di variabile complessa

1.1.1 Numeri complessi

Indicheremo con z un numero complesso. Sappiamo che qualsiasi numero complesso può essere espresso in tre forme: algebrica, trigonometrica ed esponenziale. Ai nostri scopi la forma più comoda è quella algebrica:

$$z = x + i \cdot y$$

dove $z \in \mathbb{C}$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Osserviamo che l'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} può essere messo in relazione biunivoca con \mathbb{R}^2 : pensiamo a un vettore di due componenti dove la prima componente rappresenta la parte reale x mentre la seconda la parte immaginaria y .

1.1.2 Funzioni

Sia f una funzione complessa a variabile complessa: la indicheremo con:

$$f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

In genere se la funzione è definita su tutto \mathbb{C} diremo che è **intera** e potremo scrivere $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

In virtù del fatto che un numero complesso può essere pensato anche come un vettore in \mathbb{R}^2 , la nostra funzione la possiamo interpretare come una funzione da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 e scrivere: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Non solo: possiamo vedere la nostra funzione come l'insieme di due funzioni da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} . Per esempio, se la nostra f prende il numero complesso z e lo trasforma nel numero complesso g allora possiamo considerare due funzioni $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dove u prende la parte reale e la parte immaginaria di z e la trasforma nella parte reale di g , mentre la funzione v prende la parte reale e la parte immaginaria di z e la trasforma nella parte immaginaria di g . Possiamo quindi scrivere:

$$f \approx \varphi(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

Si faccia attenzione al fatto che non tutte le coppie di funzioni da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} possono rappresentare una funzione complessa, occorre che rispettino un vincolo noto come condizione di monogeneità che verrà discussa successivamente.

1.1.3 Limiti, continuità e derivabilità

In virtù del fatto che una funzione complessa può essere pensata come una funzione a due variabili, molti strumenti del calcolo differenziale per l'analisi complessa sono deducibili dalla teoria delle funzioni a più variabili.

Il significato di *limite* è molto simile: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ significa che $|f(z) - l| \rightarrow 0$ quando $|z - z_0| \rightarrow 0$, dove il modulo di un numero complesso $z = x + i \cdot y$ è definito come $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed è sempre non negativo.

Questa definizione ci consente di introdurre il concetto di *continuità* e, come per l'analisi di funzioni reali, deduciamo che una funzione complessa è continua nel suo dominio se e solo se per ogni sottoinsieme aperto del suo codominio la controimmagine della funzione è un insieme aperto. Per la continuità in z_0 è sufficiente che si abbia $l = f(z_0)$.

Quanto alla derivabilità dobbiamo specificare che non potendo più parlare di *rapporto incrementale*, il campo complesso non è ordinato e dunque non è ben definito il concetto di incremento, penseremo alla derivata come al *tasso di variazione* dei valori della funzione. La formulazione tuttavia è la stessa.

Diremo che f è derivabile in z_0 se esiste finito il seguente limite (che viene dunque chiamato derivata di f):

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \{h = z - z_0\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Dove h è un numero complesso, e quindi può essere pensato in \mathbb{R}^2 come una direzione (è perciò l'analogo della derivata direzionale). Si noti che per questa definizione si è considerata $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, poiché, in caso contrario, non avrebbe senso dividere una quantità per un vettore.

1.1.4 Differenziabilità

Definizione 1.1

Diremo che f è **differenziabile** in z_0 se $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + o(|h|)$ per $h \rightarrow 0$.

Nella formula analoga in \mathbb{R}^2 , il vettore gradiente assumeva il ruolo di α . Nel caso complesso, invece, abbiamo $\alpha = f'(z_0) \in \mathbb{C}$, cioè la derivata della funzione nel punto z_0 che rispetto al campo complesso è uno scalare. Introduciamo ora un concetto inedito, fondamentale per lo sviluppo della teoria.

Definizione 1.2

f si dice **localmente olomorfa** in z_0 se esiste un intorno di z_0 dove è differenziabile.

Definizione 1.3

Sia $A \in \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$ insieme aperto.

f si dice **olomorfa** in A (e si usa la notazione $f \in H(A)$) se è localmente olomorfa $\forall z \in A$.

1.1.5 Condizioni di monogeneità

Consideriamo la derivata direzionale lungo la direzione h , con $h \in \mathbb{C}$, $|h| = 1$:

$$D_h f(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + t \cdot h) - f(z)}{t} = h \cdot f'(z) \quad (t \in \mathbb{R})$$

Concentriamoci ora sulla derivata lungo le direzioni $h = 1$ e $h = i$. È facile dedurre che derivare la funzione complessa lungo queste due direzioni equivale a derivare la funzione complessa nella forma scomposta $f \approx \varphi(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ lungo x e lungo y . Otteniamo quindi i seguenti vincoli:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = f'(z) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = i f'(z)$$

Da questi si deducono facilmente due condizioni che la componente reale u e quella immaginaria v devono soddisfare, dette **condizioni di monogeneità** o **di Cauchy-Riemann** (CR):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

Scritte più semplicemente: $u_x(z) = v_y(z)$ e $u_y(z) = -v_x(z)$. Spesso si abbreviano scrivendo condizioni CR. In pratica questi sono due vincoli affinché la funzione $u + i \cdot v$ sia differenziabile.

Teorema 1.4: olomorfa e condizioni di monogeneità

Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto non vuoto, sia $z \in A$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$.

Allora

$$f \in H(A)$$

se e solo se u e v sono differenziabili e sono verificate le condizioni di monogeneità.

Si considerino i seguenti esempi:

Esempio

Si consideri la funzione che restituisce il coniugato del numero complesso: $f(z) = \bar{z}$: si deduce che $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$. Le due funzioni sono differenziabili, tuttavia non soddisfano le condizioni CR e dunque la funzione non è olomorfa.

Esempio

Si consideri una funzione così definita:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ |z| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le funzioni u e v , pur soddisfacendo CR, non sono però differenziabili. Dunque f non è differenziabile.

1.1.6 Funzioni armoniche

Supponiamo $u, v \in \mathcal{C}^2$. Derivando le condizioni CR otteniamo $u_{xx} = v_{yy}$ e $u_{yy} = -v_{xx}$. Grazie al teorema di Schwarz possiamo scambiare l'ordine di derivazione e sommando membro a membro otteniamo: $u_{xx} + u_{yy} = v_{yy} - v_{yy}$ da cui

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Il membro sinistro dell'espressione non è altro che il *laplaciano* di u , ovvero la traccia della matrice hessiana di u : $\nabla^2 u = \Delta u := \sum_i u_{x_i x_i}$. Dunque abbiamo ricavato che $\Delta u = 0$. Possiamo seguire lo stesso ragionamento per v : derivando in modo opportuno le condizioni CR abbiamo $u_{xy} = v_{yy}$ e $u_{yx} = -v_{xx}$, sottraendo ricaviamo che $v_{xx} + v_{yy} = 0$, cioè $\Delta v = 0$. Abbiamo dunque trovato una forma alternativa delle condizioni di monogeneità. Inoltre osserviamo che vale:

$$\Delta u = \Delta v = 0 \quad \implies \quad \Delta f = 0 \quad (f = u + iv)$$

Definizione 1.5

Una funzione $f \in \mathcal{C}^2$ il cui laplaciano è nullo si dice *armonica*.

Definizione 1.6

Se $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ e $f = u + i \cdot v$, allora diremo che u e v sono *armoniche coniugate*.

Esempio

Data la funzione $u(x, y) = x^2 - y^2$, trovare la sua armonica coniugata.

Si verifica subito che il laplaciano di u è nullo. Le condizioni CR si concretizzano nelle equazioni $u_x = 2x = v_y$ e $u_y = -2y = -v_x$.

Da queste si deduce il gradiente della funzione cercata: $\nabla v = (2y, 2x)$. Allora $v(x, y) = 2xy + c$, dove c è una costante arbitraria. Infine, la funzione complessa che ha come componenti le due funzioni armoniche scritte sopra è $f(x, y) = z^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 = z^2$.

Ci chiediamo ora, data una funzione u armonica in A aperto di \mathbb{C} , quando esista una funzione armonica v tale che $f = u + i \cdot v$ sia olomorfa. Se ciò vale, u è detta **armonica coniugata** di v , e viceversa. Vedremo ora come l'esistenza sia garantita sotto ipotesi sul dominio non troppo restrittive.

Teorema 1.7: dell'armonica coniugata

Sia A semplicemente connesso e u armonica in A .

Allora esiste una funzione v armonica coniugata di u in A . Tale funzione è unica a meno di una costante additiva.

Esercizio

Trovare l'armonica coniugata di $u(x, y) = e^x \sin(y)$.

Soluzione: $v = -e^x \cos(y)$, da cui: $f(x, y) = e^x \sin(y) - ie^x \cos(y) = -ie^z$.

1.2 Estensione di funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{C}

Cerchiamo ora di estendere una funzione reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$ a una sua analoga nel campo complesso $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto y = f(z)$, con l'obiettivo di mantenere le stesse proprietà che aveva in \mathbb{R} . Nello specifico, vorremmo trovare l'estensione olomorfa di f , poiché l'olomorfismo è una richiesta di regolarità simile e omologa, seppur non equivalente, all'appartenenza alla classe C^1 nel caso reale.

Teorema 1.8: unicità dell'estensione olomorfa

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, con $I \subseteq \mathbb{R}$.
 Se esiste A a valori complessi tale che $I \subseteq A$, e se esiste una funzione $\varphi \in \mathcal{H}(A)$ tale che $\varphi = f$ su I , allora tale funzione φ è unica.

Il teorema fornisce un risultato di unicità: l'esistenza di una estensione olomorfa, infatti, non è garantita neanche per funzioni molto regolari.

Esempio

Trovare l'estensione olomorfa di $f(x) = x|x|$.
 È noto che $f \in C^1(\mathbb{R})$. Partendo dall'intervallo nel dominio $I_1 = (-1, 0)$ si trova facilmente l'estensione $\varphi_1(z) = -z^2$. Similmente, con $I_2 = (0, 1)$ si trova $\varphi_2(z) = z^2$. Entrambe le estensioni sono olomorfe e uniche nei rispettivi intervalli.
 Prendendo ora $I = I_1 \cup \{0\} \cup I_2 = (-1, 1)$, si incorre in un problema: la funzione risultante dal sistema delle due estensioni precedenti non è nemmeno continua su tutti i punti non nulli dell'asse immaginario: per esempio, $\varphi_1(i) = 1 \neq \varphi_2(i) = -1$. Visto che manca la continuità, condizione necessaria per la derivabilità, non esiste l'estensione olomorfa di f sull'intervallo $(-1, 1)$.

Nel caso delle potenze intere, l'estensione è possibile e di grande importanza per gli sviluppi futuri della teoria:

Teorema 1.9: estensione olomorfa per potenze intere

Sia $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$.
 Allora esiste φ estensione olomorfa di f su \mathbb{C} , ed essa ha la forma $\varphi(z) = z^n$.

Per linearità la proposizione si dimostra vera anche per le somme di potenze, comprese le somme infinite numerabili (le ben note *serie di potenze*). Ciò "sblocca" anche le serie, dunque ora si può garantire l'esistenza di un'estensione, identica tra il caso in \mathbb{R} e il caso in \mathbb{C} , anche a molte altre funzioni che assumono tale forma grazie ad uno sviluppo in serie di Taylor, a patto di rispettare i vincoli di convergenza (ovvero essere all'interno del cerchio avente raggio di convergenza R):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \longrightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall z : |z| < R$$

La naturalezza con cui si può operare questa estensione indica la "propensione delle serie di potenze ad abitare nel campo complesso", quasi si trattasse del loro "habitat naturale". Per capire meglio questa affermazione consideriamo questo sviluppo (si fa uso della serie geometrica, vedi sotto):

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n$$

L'estensione è valida quando $|z| < 1$. L'uguaglianza non vale per $z = i$: in quel punto la serie diverge. Pur essendo un problema "immaginario" esso ha conseguenze sulla convergenza in campo reale: infatti, la serie ha raggio di convergenza unitario proprio a causa di questa sola irregolarità.

Di seguito alcuni risultati particolarmente significativi:

- La **serie geometrica** $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, si estende identica in $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, con la condizione $|z| < 1$;
- Le funzioni trigonometriche e iperboliche $\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ sono le estensioni delle relative funzioni reali;
- La funzione inversa $\arctan x$ si estende in $\arctan z$ a patto che $|z| < 1$;

- La funzione esponenziale ha estensione $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Tralasciamo per il momento le estensioni di $\log(1+z)$ e $(1+z)^\alpha$.

Per ulteriori esempi di sviluppi in serie si veda il prontuario a fine libro.

Alla luce di queste estensioni “funzionali”, possiamo giustificare la **formula di Eulero** che lega forma esponenziale dei numeri complessi a quella polare. Per fare ciò basta moltiplicare la serie di $\sin z$ per i e sommarla alla serie di $\cos z$, si ottiene proprio la serie di e^{iz} . Osserviamo che la formula è estesa ad argomenti z complessi e non solo ad angoli ϑ compresi tra 0 e 2π :

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

Preso $\vartheta \in [0, 2\pi]$ abbiamo $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta = \cos(\vartheta + 2k\pi) + i \sin(\vartheta + 2k\pi) = e^{i(\vartheta + 2k\pi)} = e^{i\vartheta + 2k\pi i}$, per cui la funzione esponenziale complessa è $2\pi i$ -periodica. Questo dovrebbe far capire per quale motivo l'estensione del logaritmo potrebbe risultare problematica.

1.2.1 Logaritmo complesso

Per trovare il logaritmo partiamo dalla sua inversa che già abbiamo esteso, l'esponenziale: risolviamo l'equazione a variabile complessa $e^z = w$, con $w \in \mathbb{C}$ noto.

Scriviamo w in forma esponenziale:

$$\begin{aligned} e^z &= |w|e^{i\vartheta} && (\text{con } \vartheta = \arg w) \\ &= |w|e^{i(\vartheta + 2k\pi)} && (\text{ricordando la periodicità di } e^z) \end{aligned}$$

Invertiamo:

$$\begin{aligned} z &= \log(e^z) \\ &= \log(|w|e^{i(\vartheta + 2k\pi)}) \\ &= \log|w| + i(\vartheta + 2k\pi) && (\text{usando le proprietà dei logaritmi}) \end{aligned}$$

Come nel caso reale, non tutte le equazioni del tipo $e^z = w$ sono risolvibili: per esempio, $e^z = 0$ non ha soluzioni nel campo complesso. Prendendo invece $e^z = -1$, una soluzione possibile e facilmente verificabile è $z = i\pi$; ma sono valide anche tutte le altre soluzioni che si ottengono aggiungendo o togliendo un multiplo di $2\pi i$ (“giri immaginari”).

Adottiamo la convenzione di chiamare $\ln x$ il logaritmo reale e $\log z$ il logaritmo complesso. Per il logaritmo si rende dunque necessaria una definizione più inclusiva:

Definizione 1.10

Si dice **logaritmo complesso** la funzione così definita:

$$\log z := \ln|z| + i \arg z + i2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

La funzione logaritmo non mappa in un singolo valore, ma in un *insieme di valori*, in questo caso distanti $2\pi i$ l'uno dall'altro. Le funzioni di questo tipo sono dette **funzioni polidrome**. Si ricordi che per definizione è impossibile che una *funzione* mappi in più valori distinti. Si può aggirare questo problema formale ridefinendo il codominio del logaritmo complesso come l'insieme delle parti di \mathbb{C} , e far restituire alla funzione degli *insiemi* (univocamente definiti) piuttosto che dei *numeri* complessi. Le funzioni nel senso tradizionale del termine, ovvero non polidrome, sono chiamate **monodrome**.

Cerchiamo di capire perché *non* è possibile scegliere una delle infinite *realizzazioni* del logaritmo complesso come “valore privilegiato” trascurando gli altri, come invece è stato fatto per la radice quadrata nei reali, scegliendo di definirla come la radice positiva e scartando quella negativa: si ha già idea di polidromia cercando le soluzioni dell'equazione $x^2 = 1$: essa ammette due soluzioni: $+1$ e -1 . Cercando la funzione inversa a x^2 si sarebbe dovuta trovare una funzione polidroma, tuttavia per soddisfare la definizione di funzione si è scelto di includere solo il ramo positivo: si otteneva così la funzione \sqrt{x} .

Cerchiamo le soluzioni di $e^z = 1$: una soluzione ovvia è $z = 0$. Immaginiamo ora di partire dalla soluzione 0 e spostarsi nel piano complesso seguendo in senso antiorario la circonferenza di raggio unitario $\log z = i\vartheta$,

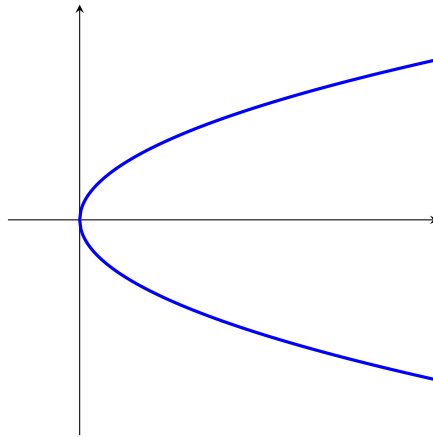


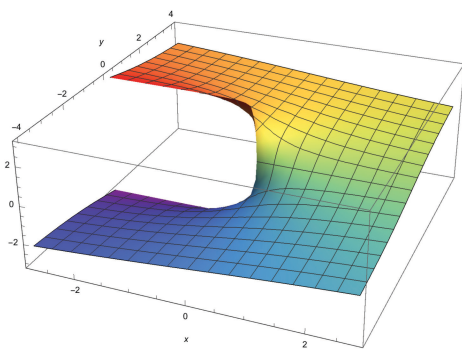
Figura 1.1: Radice quadrata “polidroma”

con $\vartheta \in [0, 2\pi]$, la quale include anche il punto $z = 0$. Stiamo quindi aumentando l’angolo ϑ a partire da 0. Dopo un giro completo, ovvero per $\vartheta \rightarrow 2\pi$, si ottiene la soluzione $z = 2\pi i$, valore differente rispetto a quello da cui siamo partiti. Non è dunque possibile sfuggire dalla multivalocità del logaritmo complesso limitandolo a specifiche realizzazioni, nemmeno in un caso così semplice.

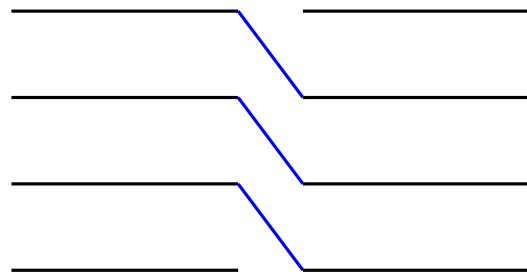
Il problema nasce dal fatto che $z = 0$ è un “punto problematico”, detto *punto di diramazione* del logaritmo, e la circonferenza presa in considerazione è una curva chiusa che lo contiene.

Un possibile approccio risolutivo, ideato da Riemann, è quello di limitare il dominio del logaritmo complesso escludendo la retta positiva dell’asse dei reali, caratterizzata dagli z tali che $\text{Re } z > 0$ e $\text{Im } z = 0$. Facendo ciò si impedisce ogni tipo di “giro” attorno al punto critico 0, e qualsiasi percorso chiuso si decida di percorrere, si tornerà sempre alla soluzione di partenza. In questo modo privilegiamo la soluzione con $k = 0$.

Per ovviare alla perdita di soluzioni che scaturisce dalla limitazione a una sola realizzazione, possiamo immaginare di associare a ogni k un diverso piano \mathbb{C} . Completato un giro antiorario (od orario) attorno allo 0, si sale (o si scende) alla realizzazione successiva. Questi piani sono detti appunto *di Riemann*, e si possono immaginare come dei piani paralleli interrotti da un buco e collegati con quello immediatamente sottostante attraverso dei “ponti”. Possiamo fare questa costruzione per altre funzioni polidrome; il numero dei piani di Riemann potrà essere finito o infinito a seconda della funzione considerata.



(a) Parte immaginaria del logaritmo complesso

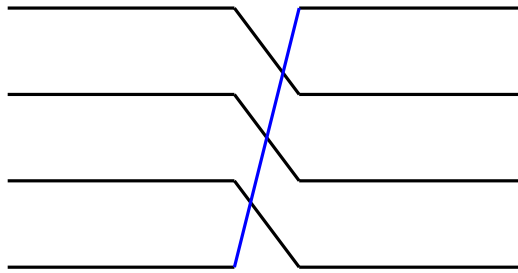


(b) Piani di Riemann per il logaritmo complesso

Esempio

La radice complessa è definita come $\sqrt{z} = z^{1/2} := e^{1/2 \log z}$. Sfruttando la definizione di logaritmo complesso si osserva che $\sqrt{z} = e^{1/2(\log|z| + i(\vartheta + 2k\pi))} = e^{ik\pi} e^{1/2(\log|z| + i\vartheta)}$, dove la quantità $e^{ik\pi}$ è -1 o 1 a seconda che k sia rispettivamente dispari o pari. Si osserva per esempio che $\sqrt{1} = \pm 1$. In questo caso i piani di Riemann sono 2 ed essi ciclano l’uno nell’altro: partendo da 1 (primo piano) e facendo un giro antiorario nella circonferenza unitaria (nel modo precedentemente descritto) si finisce in -1 (secondo piano); aggiungendo un ulteriore giro si torna in 1 (primo piano).

In generale per ogni potenza con esponente razionale $z^{n/m}$, con $n, m \in \mathbb{Z}, m > 1$ sono presenti esattamente m piani ciclici; per tutti gli altri casi, come nel logaritmo, i piani sono infiniti, e non si riesce mai a tornare nella

Figura 1.3: Piani di Riemann per $z^{\frac{m}{n}}$

soluzione originale senza invertire il percorso.

1.3 Integrali di linea

1.3.1 Definizione e concetti generali

Analogamente al campo reale, data una funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua e una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ regolare, definiamo il suo *integrale di linea* come $\int_{\alpha} f(z) dz$.

Si ricorda che una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è detta *semplice* se è iniettiva nel suo dominio, *chiusa* se $\alpha(a) = \alpha(b)$ e *regolare* se $\alpha \in C^1[a, b]$.

Definizione 1.11

Una curva α regolare, chiusa e semplice si dice *circuito*.

Una regione $A \subseteq \mathbb{C}$ interna a un circuito è detta *semplice*.

Chiamiamo *polo* un punto z_0 esterno alla curva ($z_0 \notin \alpha(I)$). È possibile parametrizzare α usando le coordinate polari, ovvero “misurando” la sua distanza in ogni punto dal polo mediante una funzione raggio ρ e usando la coordinata angolare ϑ :

$$\alpha(t) = z_0 + \rho(\vartheta)e^{i\vartheta}, \quad \text{con } \vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1]$$

Si noti che ad ogni giro (antiorario) attorno al polo si aggiunge un 2π all'angolo ϑ , in questo modo la funzione α resta effettivamente una funzione in quanto definita univocamente da ϑ a $\alpha(\vartheta)$. Inoltre questo accorgimento permette anche la seguente definizione:

Definizione 1.12

Data una curva α parametrizzata come di sopra e dato il polo $z_0 \notin \alpha(I)$, si dice **indice di avvolgimento** di α rispetto a z_0 la seguente quantità:

$$\text{ind}(\alpha, z_0) := \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2\pi}$$

Esso misura il numero di giri, o la parte frazionaria di giri, compiuti dalla curva attorno al polo.

Se invece viene data una funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua con parametrizzazione α regolare in $[a, b]$, il suo integrale di linea è risolvibile normalmente applicando quanto visto per le funzioni reali in Analisi II:

$$\int_{\alpha} f ds = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t) dt$$

Si noti che quest'ultimo integrale monodimensionale è un numero complesso, e può essere risolto separando parte reale e parte immaginaria, trattando i come una costante e portandola fuori da integrale.

Teorema 1.13

Sia α chiusa e regolare.

Allora $\text{ind}(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0}$.

La dimostrazione è lasciata al lettore come esercizio.
 Per l'integrale di linea complesso valgono le stesse proprietà base di quello reale:

$$\int_{\alpha} (f + g) = \int_{\alpha} f + \int_{\alpha} g$$

$$\int_{\alpha} kf = k \int_{\alpha} f, \quad \text{con } k \in \mathbb{C}$$

$$\int_{\alpha} f = - \int_{-\alpha} f$$

$$\left| \int_{\alpha} f dz \right| \leq \int_{\alpha} |f| ds. \quad \text{si noti che } ds = |\alpha'(\vartheta)| dt \geq 0$$

1.3.2 Teorema dell'integrale nullo e formula integrale di Cauchy

Teorema 1.14: dell'integrale nullo di Cauchy

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ una regione semplice e sia $f \in H(A)$. Allora $\forall \gamma$ chiusa contenuta in A , risulta

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Dimostrazione

La dimostrazione, molto complessa, si basa sull'estensione di una dimostrazione che considera delle γ triangolari, per poi generalizzare su delle spezzate poligonali. Riportiamo una dimostrazione semplificata valida nel caso in cui nel caso in cui $f \in C^1$.

Preso l'insieme \tilde{A} come l'insieme di \mathbb{R}^2 associato ad A , intuitivamente riconosciamo che $f \in C^1(A) \implies u, v \in C^1(\tilde{A})$, da cui

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} [u(x, y) + iv(x, y)][dx + idy] = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx$$

Dentro i due integrali ci sono forme differenziali lineari chiuse grazie alle condizioni di Cauchy-Riemann e siamo in un insieme semplicemente connesso, quindi sono anche forme differenziali esatte. Da ciò segue che l'integrale di linea su γ chiusa è nullo.

Notiamo che in campo complesso la continuità *non* è più condizione sufficiente all'esistenza della primitiva.

Esempio

Vediamo infatti che prendendo $f(z) = \frac{1}{z}$ e $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ abbiamo $f \in H(A)$. Nonostante ciò f non ammette primitiva, perchè sarebbe il logaritmo complesso, che è polidroma e non olomorfa. Ciò è dovuto all'insieme A , che non è semplicemente connesso.

Si nota che anche per $f(z) = \bar{z}$ non esiste una primitiva, in questo caso perchè non è olomorfa.

Definizione 1.15

Sia $f \in H(A)$, A aperto, se $\exists F \in H(A) : F'(z) = f(z), \forall z \in A$, diremo che F è una **primitiva** di f .

Teorema 1.16: condizione sull'esistenza della primitiva

Sia $f \in C^1(A)$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto.

Allora f ammette primitiva in A se e solo se le forme differenziali lineari $u dx - v dy$ e $u dy + v dx$ sono esatte.

Da ciò deduciamo che avere una f olomorfa in un insieme semplicemente connesso ci garantisce l'esistenza della primitiva (insieme semplicemente connesso implica che le forme differenziali siano esatte).

Dimostrazione**Dimostriamo** \Leftarrow

Fissiamo $z_0 \in A$ e definiamo $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw$, con γ_z una qualsiasi curva che congiunge z_0 a z , quindi parametrizzo come $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$.

Quindi

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w) dw - \int_{\gamma_z} f(w) dw$$

che, usando la parametrizzazione del segmento $[z, z+h]$ $\beta(t) = z + th$ con $t \in [0, 1]$ è uguale a

$$\int_{[z, z+h]} f(w) dw = \int_0^1 f(z+th) dt$$

essendo $\beta'(t) = f(z+th)h$.

Questo ci porta alla conclusione che

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th) dt \text{ che per } h \rightarrow 0 \quad \text{è } \int_0^1 f(z) dt = f(z)$$

Dimostriamo \Rightarrow

$\forall \gamma : [0, 1] \rightarrow A$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx) &= \int_{\gamma} f(z) dz = \\ &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^1 F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ &= [F(\gamma(t))]_0^1 = \\ &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \\ &= F(z_1) - F(z_0) \end{aligned}$$

Quindi l'integrale dipende solo dal punto iniziale e finale e per questo le forme differenziali sono esatte.

A questo teorema sono legati due corollari:

Corollario 1.17

Sia A una regione semplice, $f \in H(A) \cap C^0(\bar{A})$.

Allora

$$\int_{\partial A} f(z) dz = 0$$

Corollario 1.18

Sia A un aperto tale che $\partial A = \gamma - U_{i=1}^n(\gamma_i)$ e sia $f \in H(A) \cap C^0(\bar{A})$.

Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz$$

Overo l'integrale su una linea chiusa semplice è uguale alla somma degli integrali sulle linee chiuse semplici interne.

Teorema 1.19: formula integrale di Cauchy

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ semplice e $f \in H(A) \cap C^0(\bar{A})$. Allora $\forall z_0 \in A$, si ha che

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Dimostrazione

La funzione integranda non è olomorfa in A (o l'integrale sarebbe nullo per Cauchy), ma lo è in una regione bucata in z_0 . Di conseguenza

$$\int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Facendo tendere $r \rightarrow 0$ si ottiene:

$$\int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i2\pi f(z_0)$$

da cui la tesi.

Corollario 1.20

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ semplice e siano $f, g \in H(A) \cap C^0(A)$ e $f = g$ su ∂A . Allora $f \equiv g$ in A , ovvero f nella frontiera di A caratterizza f in tutta A .

1.3.3 Funzioni analitiche, teorema di Weierstrass e formula delle derivate

Definizione 1.21

Una funzione si dice *analitica* in un aperto A se è sviluppabile in serie di potenze in ogni punto di A .

Se f è differenziabile (olomorfa) in un aperto, allora f si può esprimere come serie di potenze (analitica) in tale aperto:

Teorema 1.22: di Weierstrass

Sia $A \subset \mathbb{C}$ aperto non vuoto e sia $f \in H(A)$. Allora f è rappresentabile in un intorno di ogni $z_0 \in A$ come una serie di potenze avente raggio di convergenza $R \geq r_{z_0} = d(z_0, \partial A)$. Più precisamente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Dimostrazione

Per la Formula integrale di Cauchy 1.19 sappiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z)} dw$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^n}$$

Ora consideriamo un insieme A centrato in z_0 e definiamo la distanza minima del centro dalla frontiera di A come $r_0 = d(z_0, \partial A)$. Osserviamo che preso un punto z , se $|z - z_0| < r_0$ allora $z \in A$. Esiste quindi

la circonferenza γ_r centrata in z_0 e di raggio $r < r_0$ tale che:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n$$

Abbiamo dunque espresso una funzione olomorfa f come serie di potenze.

Come anticipato dal teorema di Weierstrass segue che ogni funzione olomorfa è anche analitica ed esprimibile come serie di potenze convergente in un opportuno disco, detto “disco di convergenza”. Partendo dalla formula per l’espansione in serie di Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Si ottiene la **formula per le derivate**:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

1.4 Serie di Laurent

1.4.1 Singolarità e teorema di Laurent

Il teorema di Weierstrass incontra tuttavia dei punti “invalicabili”. Ad esempio, data la funzione $f(z) = \frac{1}{1-z}$, la relativa serie di Taylor centrata nell’origine è $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$, e in un qualsiasi punto z_0 diviene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^n}, \quad |z-z_0| < |1-z_0|$$

Avendo posto

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{1-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

Poniamo la condizione affinché la serie geometrica converga, da cui il raggio di convergenza è pari a $|1-z_0|$:

$$\left| \frac{z-z_0}{1-z_0} \right| < 1 \Rightarrow |z-z_0| < |1-z_0|$$

Tale funzione $f(z)$ presenta nel punto 1 una singolarità che rende impossibile esprimere per serie la funzione nel resto del piano complesso; per tale motivo sarebbe erroneo confondere una funzione con una sua espansione in serie di potenze, che non la descrive nella sua interezza.

Le singolarità sono punti per cui non vi è convergenza della serie di Taylor e dunque il raggio di convergenza viene limitato da questi punti. Come vedremo queste “ostruzioni” sono di vario tipo e verranno opportunamente classificate.

Per aggirare questo problema presentiamo il teorema di Laurent, esso permette una nuova espansione in serie (“Serie di Laurent”) su di una corona circolare A (non semplicemente connessa) centrata nel punto stesso che compromette l’espansione in serie di Taylor. Il teorema inoltre non richiede che la funzione f sia olomorfa su tutto il dominio ma esclusivamente sulla corona circolare A :

Teorema 1.23: teorema di Laurent

Sia $f \in H(A)$, $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$, γ una curva regolare semplice chiusa in A che concateni z_0 . Allora:

$$\forall z \in A, \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Si noti che la curva è *qualsiasi* purché concatenata con z_0 ; ciò deriva dal fatto che la funzione è olomorfa nel dominio dove si esegue l'integrazione, e pertanto l'integrale non varia per deformazione continua.

Il teorema di Laurent è pertanto una generalizzazione del teorema di Weierstrass, in cui si include anche una somma sui termini negativi. Sono proprio le potenze negative, infatti, a dare informazioni sul comportamento delle singolarità.

Definizione 1.24

Un punto z_0 si dice **singolare** (o critico) per una funzione $f(z)$ se non può essere incluso in nessun disco di convergenza della serie di potenze.

Esempio

Si consideri la funzione:

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

La funzione è singolare per:

$$z = 0, \frac{1}{z} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Definizione 1.25

Un punto z_0 singolare per $f(z)$ si dice **isolato** se esiste $r > 0$ tale che l'insieme:

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

Non contiene punti critici per f .

Nell'esempio precedente, tutti i punti critici per f sono isolati, eccezion fatta per $z_0 = 0$, che è punto di accumulazione.

1.4.2 Classificazione delle Singolarità

Scomponendo la serie di Laurent per una funzione f nelle due somme:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

Definizione 1.26

La sommatoria:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Prende il nome di **somma regolare**.

Definizione 1.27

La sommatoria:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

Prende il nome di **somma singolare**.

Definizione 1.28

Diremo che z_0 è una **singolarità eliminabile** se è il centro di un'espansione in serie di Laurent per una funzione f in cui i coefficienti della somma singolare sono tutti *nulli*.

Nel caso di singolarità eliminabili, essendo la somma singolare nulla, la teoria già vista con il teorema di Weierstrass è sufficiente. Quando una singolarità non è eliminabile, diamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.29

Sia z_0 il centro di un'espansione in serie di Laurent per una funzione f tale che la somma singolare sia *somma finita* di n termini. Allora z_0 si dice **polo di ordine n** .

Definizione 1.30

Sia z_0 il centro di un'espansione in serie di Laurent per una funzione f tale che la somma singolare non sia somma finita di termini e sia non nulla. Allora z_0 si dice **singolarità essenziale**.

Esempio

La funzione $f(z) = \frac{1}{z-1}$, sviluppata in serie di Laurent nel centro $z_0 = 1$ è $f(z) = (z-1)^{-1}$. Risulta ovvio pertanto che z_0 è un *polo del primo ordine*.

Esempio

La funzione $f(z) = \exp\{\frac{1}{z}\}$ sviluppata in $z_0 = 0$ è pari a:

$$\exp\left\{\frac{1}{z}\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

Pertanto z_0 è singolarità essenziale.

In maniera intuitiva e non rigorosa, tale intuizione verrà poi confermata formalmente dalla teoria, si evince che in corrispondenza dei poli la funzione “tende all'infinito” in senso complesso, mentre nelle singolarità essenziali “non esiste il limite” per la funzione.

1.4.3 Punto all'infinito

In campo complesso le nozioni di $+\infty$ e $-\infty$ incontrate in \mathbb{R} perdono completamente di significato, perché non vi sono più “due infiniti” nelle due direzioni, ma ve ne sono “infiniti” nelle infinite direzioni. Di conseguenza risulta utile considerare tutti i punti distanti infinitamente dall'origine come un punto unico, denotato con ∞ . Diamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.31

∞ è **punto singolare** per $f(z)$ se $z_0 = 0$ è punto singolare per $f(\frac{1}{z})$.

Definizione 1.32

Diciamo che ∞ è **punto singolare isolato** per f se è singolare e tutti i punti singolari al finito di f ricadono all'interno di un disco di raggio R , o equivalentemente:

$$f \in H(\{|z| > R\})$$

Esempio

La funzione $f(z) = e^z$ ha singolarità essenziale isolata in $z_0 = \infty$, mentre per $g(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ il punto all'infinito non è isolato.

Esempio

Si consideri la funzione:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

La sua espansione in serie per $z_0 = 0$ è:

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{+\infty} z^n$$

In $z_0 = 1$:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-z)^n = \sum_{n=-1}^{+\infty} (1-z)^n$$

Infine in $z_0 = \infty$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{-1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

Pertanto in 0 e 1 esistono dei poli del primo ordine, in ∞ una singolarità essenziale (isolata).

1.4.4 Caratterizzazione di Poli e Singolarità Essenziali

Valgono le seguenti proposizioni:

Teorema 1.33: caratterizzazione dei poli

Sia z_0 un punto singolare isolato per f . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f ha un polo di ordine n in z_0 ;
2. $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0 e inoltre $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$;
3. è rispettata la seguente relazione tra ordini di grandezza:

$$|f(z)| \asymp \frac{1}{|z - z_0|^n};$$

4. $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ ha in z_0 uno zero di ordine n .

Teorema 1.34: caratterizzazione delle singolarità

Valgono le seguenti affermazioni, con z_0 punto singolare isolato per f :

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff z_0$ è un *polo*.
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ esiste finito $\iff z_0$ è una *singolarità eliminabile*.
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ non esiste $\iff z_0$ è una *singolarità essenziale*.

Teorema 1.35: caratterizzazione delle singolarità essenziali

Sia z_0 una singolarità essenziale isolata per $f(z)$. Allora la funzione $\frac{1}{f(z)}$ ha in z_0 una singolarità essenziale oppure un punto di accumulazione di poli.

Esempio

La funzione $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$ ha singolarità essenziale in $z_0 = 0$, mentre il suo inverso - visto precedentemente - è la funzione $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ che ha in z_0 un punto di accumulazione di poli.

Esempio

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in 0, così come il suo inverso $\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}}$

Ricapitoliamo alla luce di questi risultati la classificazione delle singolarità:

1. z_0 è *singolarità eliminabile* quando $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ esiste finito. Un esempio è $\frac{\sin(z)}{z}$ con $z_0 = 0$.
2. z_0 è un *polo* quando $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ esiste finito. Un esempio è $\frac{1}{z}$ con $z_0 = 0$.
3. z_0 è *singolarità essenziale* quando $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ non esiste. Un esempio è $e^{\frac{1}{z}}$ con $z_0 = 0$.

Un altro modo per classificare la singolarità consiste nello studiare la serie di Laurent della funzione centrata nella singolarità. Se le potenze negative compaiono in numero infinito si è in presenza di una singolarità essenziale, se compaiono in numero finito, con cardinalità m , si è in presenza di un polo di ordine m , se non vi sono potenze negative allora è una singolarità eliminabile.

1.5 Teorema dei residui

Si è visto che grazie al teorema di Laurent è possibile sviluppare una funzione nella forma

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Il coefficiente a_{-1} assume una grandissima importanza e prende il nome di **residuo integrale**:

$$\text{Res}(f, z) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) dw$$

Notiamo subito che l'integrale nella definizione di a_{-1} si riduce a un semplice integrale della funzione. Per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy, se f è olomorfa su un aperto A , allora $\text{Res}(f, z) = 0 \quad \forall z \in A$.

Il seguente teorema lega i residui all'integrale della funzione, e si rivela quindi molto utile per il calcolo degli integrali stessi, anche di funzioni reali.

Teorema 1.36: dei residui

Sia A un aperto di \mathbb{C} . Sia inoltre $f \in H(A \setminus \{z_1 \dots z_n\}) \cap C^0(\bar{A} \setminus \{z_1 \dots z_n\})$. Allora:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j)$$

Il teorema segue direttamente dal corollario 1.18, quando i punti z_j sono le uniche zone di non olomorfia di f in A . In tal caso:

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_j)$$

1.5.1 Residuo dell'infinito

Teorema 1.37

Sia γ una curva chiusa in \mathbb{C} che contenga al suo interno tutte le singolarità al finito. Dato un $R > 0$, sia $f \in H(|z| > R)$ e sia $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z)^n$ lo sviluppo di f in un intorno dell'infinito. Allora:

$$\text{Res}(f, \infty) := -a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(w) dw$$

Dimostrazione

Consideriamo la serie di Laurent valida in $|z| > R$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) R i e^{i\theta} d\theta = && \text{(passando alle coordinate polari)} \\ &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = && \text{(scrivendo f in serie di Laurent)} \\ &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n R^n e^{i(n+1)\theta} \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[a_n R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \right] \end{aligned}$$

Per $n \neq -1$, il termine esponenziale è somma di seni e coseni con coefficienti complessi (formula di

Eulero). Il loro integrale tra 0 e 2π vale 0. Rimane dunque solamente il caso in cui $n = -1$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)dw = \frac{1}{2\pi} [a_{-1}(2\pi)] = a_{-1}$$

e per le proprietà dell'integrale di linea

$$-a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(w)dw$$

da cui segue immediatamente la tesi.

Notiamo che, per il calcolo del residuo in un punto z_0 interno a \mathbb{C} , percorrevamo la curva γ nel verso standard antiorario, in modo da lasciare a sinistra z_0 . Per analogia, calcolando $\text{Res}(f, \infty)$, dovremo lasciare a sinistra il punto all'infinito: questo richiede di percorrere γ in verso orario.

Teorema 1.38

Sia $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_1 \dots z_n\})$. Allora:

$$\sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) + \text{Res}(f, \infty) = 0$$

Dimostrazione

Il teorema è una semplice conseguenza delle due relazioni ottenute fino ad ora per i residui al finito e il residuo all'infinito, eseguendo una somma membro a membro:

$$\int_{\gamma} f(w)dw = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j)$$

$$\int_{-\gamma} f(w)dw = 2\pi i \text{Res}(f, \infty)$$

Si osservi che nel caso in cui f sia olomorfa in tutto \mathbb{C} , i residui sono tutti nulli.

1.5.2 Calcolo dei residui

Elenchiamo ora una serie di proprietà utili per gli esercizi:

1. $z_0 \neq \infty$ singolarità eliminabile per $f \implies \text{Res}(f, z_0) = 0$;
2. $z_0 \neq \infty$ polo del primo ordine per $f \implies \text{Res}(f, z_0) \neq 0$;
3. ∞ zero del primo ordine per $f \implies \text{Res}(f, \infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) \neq 0$;
4. ∞ zero di ordine maggiore del primo per $f \implies \text{Res}(f, \infty) = 0$;
5. $\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

Dimostriamo, per esempio, il punto (3). Siano a_n i coefficienti della serie di Laurent associata alla funzione f nell'intorno di ∞ . Per ipotesi, f ha ivi uno zero del primo ordine. Pertanto, per $n \geq 0$, $a_n = 0$. Avremo dunque $f(z) = a_{-1}z^{-1} + o(z)$, da cui $z f(z) = a_{-1} + o(z^2)$. La tesi segue immediatamente, facendo tendere z a ∞ .

Presentiamo altri importanti e utili risultati per il calcolo dei residui:

Teorema 1.39: regola per zeri del prim'ordine

Siano $z_0 \neq \infty, g(z)$ regolare tale che $g(z_0) \neq 0, h(z)$ regolare con zero del primo ordine in $z_0, f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$.

Allora

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Dimostrazione

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)}{h'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{g(z_0) + o(1)}{h'(z_0) + o(1)}$$

Nello sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ il termine a_{-1} sarà dunque pari a $\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Teorema 1.40: regola per poli di ordine m

Sia $z_0 \neq 0$ un polo di ordine m per f . Definiamo la funzione $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$. Allora:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Dimostrazione

Sviluppando f in serie di Laurent, abbiamo:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

Moltiplicando ambo i membri per $(z - z_0)^m$, otteniamo:

$$g(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_{-2}(z - z_0)^{m-2} + \cdots + a_{-m}$$

Facendo corrispondere la formula ottenuta alla formula di Taylor si ottiene la tesi.

Teorema 1.41: regola di De L'Hôpital

Siano f e g localmente oloforme in un intorno di z_0 tali che $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Allora:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

1.5.3 Lemmi di Jordan

Consideriamo un generico arco di circonferenza:

$$C_R(\vartheta_1, \vartheta_2) = \{z \in \mathbb{C} : z = R e^{i\vartheta}, \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]\}$$

Teorema 1.42

Sia $f(z)$ continua su C_R . Allora:

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq R(\vartheta_2 - \vartheta_1) \max_{|z| \in C_R} |f(z)|$$

Teorema 1.43

Sia $K > 0$ e sia $f(z)$ continua per $|z| > K$.

Se $\exists \beta > 1, c > 0$ tali che $|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^\beta} \quad \forall z : |z| > K$, allora:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R(\vartheta_1, \vartheta_2)} f(z) dz = 0 \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2$$

Teorema 1.44: lemmi di Jordan

Sia $f(z)$ continua per $|z| > K$. Siano inoltre $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi]$ e $a > 0$, tali che:

$$\limsup_{\substack{R \rightarrow \infty \\ z \in C_R(\vartheta_1, \vartheta_2)}} |f(z)| = 0$$

Allora:

1. se $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_2 = \pi$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R(0, \pi)} e^{iaz} f(z) dz = 0$$

2. se $\vartheta_1 = \pi$ e $\vartheta_2 = 2\pi$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R(\pi, 2\pi)} e^{-iaz} f(z) dz = 0$$

3. se $\vartheta_1 = -\frac{\pi}{2}$ e $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} e^{-az} f(z) dz = 0$$

4. se $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta_2 = \frac{3}{2}\pi$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)} e^{az} f(z) dz = 0$$

Esempio

Desideriamo calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{con } f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Per risolverlo è utile passare in campo complesso. Studiamo l'integrale di f su γ_R .

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{C_R(0, \pi)} f(z) dz$$

Facendo tendere R all'infinito e applicando il primo lemma di Jordan con $a = 0$, troviamo che il secondo integrale si annulla:

$$\int_{C_R(0, \pi)} f(z) dz = 0$$

Calcoliamo ora l'integrale sulla curva attraverso il teorema dei residui, con $R > 1$, che sarà uguale all'integrale da noi cercato:

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z-i)(z+i)} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Sempre per il calcolo degli integrali può essere utile il seguente risultato:

Teorema 1.45

Sia $f(z)$ una funzione complessa con z_0 polo di primo ordine. Sia inoltre σ_ε una curva con parametrizzazione $z - z_0 = \varepsilon e^{i\vartheta}$, con $\vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1]$ (ovvero l'arco antiorario della circonferenza centrata

in z_0 e di raggio ε che va da ϑ_0 a ϑ_1). Allora:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\sigma_\varepsilon} f(z) dz = i(\vartheta_1 - \vartheta_0) \operatorname{Res}(f, z_0)$$

2 Analisi funzionale I

2.1 Misura e integrale di Lebesgue

Introduciamo ora una nuova misura, la misura di Lebesgue, la quale permette un'integrazione più potente rispetto alla già nota misura di Riemann.

Cerchiamo di capire come funziona questo nuovo approccio e come si differenzia dal precedente con questo esempio: supponiamo di versare in una stanza con il pavimento piastrellato una certa quantità di monete diverse, e di volerne calcolare l'ammontare. Si aprono due vie possibili: contare - piastrella per piastrella - i soldi sparsi nella stanza, oppure separare dapprima tutte le monete in pile distinte, contare l'ammontare di ogni pila e sommare i valori calcolati. L'integrale di Riemann "gioca sul dominio", ovvero opera su suddivisioni sempre più fini del dominio per valutare l'integranda, mentre l'integrale di Lebesgue "gioca sul codominio", suddividendo il *range* dei valori assunti dall'integranda in intervallini e calcolando l'area della controimmagine di ciascun intervallino, sommando poi i contributi pesati con il valore assunto nell'intervallino.

2.1.1 Misura di Lebesgue

Definizione 2.1

Si dice **Iper-Rettangolo** un insieme $\Omega \in \mathbb{R}^n$ nella forma:

$$\Omega = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \quad a_i \leq b_i \quad \forall i$$

Definizione 2.2

Si definisce la **misura** di un iper-rettangolo Ω il numero reale positivo:

$$|\Omega| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Definizione 2.3

Si dice **Pluri-Rettangolo** o **Plurintervallo** l'unione di un numero finito di iper-rettangoli.

In tal caso la misura si calcola come *somma delle misure di iper-rettangoli disgiunti*.

Definizione 2.4

Dato Ω aperto limitato, definiamo la misura di Ω come:

$$|\Omega| := \sup\{|R| : R \subset \Omega, R \text{ pluri-rettangolo}\}$$

Definizione 2.5

Dato Ω chiuso limitato, definiamo la misura di Ω come:

$$|\Omega| := \inf\{|R| : R \supset \Omega, R \text{ pluri-rettangolo}\}$$

Talvolta ci si riferisce a un aperto con il termine "grasso", in quanto ogni punto dell'insieme possiede un intorno contenuto nell'insieme; allo stesso modo un chiuso viene detto insieme "magro".

Sia per Ω chiusi che aperti *limitati* la misura come definita sopra esiste finita.

Definizione 2.6

Per insiemi Ω *limitati* definiamo la **misura esterna**:

$$|\Omega|^* = \inf\{|A| : A \supset \Omega, A \text{ aperto (limitato)}\}$$

E la **misura interna**:

$$|\Omega|_* = \sup\{|C| : C \subset \Omega, C \text{ chiuso (limitato)}\}$$

Segue quindi banalmente (per monotonia) che $|\Omega|^* \geq |\Omega|_*$, inoltre se Ω è un insieme aperto o chiuso (condizione sufficiente ma certamente non necessaria) allora $|\Omega|^* = |\Omega|_*$.

Definizione 2.7

Un insieme *limitato* Ω è **Misurabile secondo Lebesgue** (anche Lebesgue-misurabile o L-misurabile) quando vale l'uguaglianza

$$|\Omega| = |\Omega|^* = |\Omega|_*$$

dove $|\Omega|$ è la misura n-dimensionale di Ω .

La misura di Lebesgue è uno strumento potente poiché permette di definire la misura per un grandissimo numero di insiemi.

Esempio

Calcoliamo la misura dell'insieme $\{a_n\} := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, possiamo adoperare il seguente metodo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |A_\varepsilon| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 0$$

Dove $A_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n - \varepsilon/2^n, a_n + \varepsilon/2^n) \supset \Omega$: è un aperto e unione di infiniti intervalli. Chiaramente $|A_\varepsilon| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n}$, infatti gli intorno dei razionali si sovrappongono (varrebbe l'uguaglianza se fossero disgiunti).

Estendiamo la definizione di misurabilità anche per insiemi illimitati.

Definizione 2.8

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ anche illimitato, diciamo che esso è **misurabile secondo Lebesgue** se, data la sfera $B_r := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < r\}$, l'insieme $\Omega \cap B_r$ è misurabile per ogni $r > 0$. Si definisce la sua misura come:

$$|\Omega| = \lim_{r \rightarrow +\infty} |\Omega \cap B_r| \in [0, +\infty]$$

Osserviamo che per un opportuno r tutti gli insiemi limitati sono misurabili anche con questa definizione.

Esercizio

Trovare un esempio di insieme illimitato ma con misura finita.

Suggerimento: si consideri la funzione $\frac{1}{x^2}$. Il suo integrale fra 1 e $+\infty$ vale 1.

Per la misura di Lebesgue valgono i seguenti risultati.

1. Se $\{A_i\}$ è una collezione discreta di insiemi misurabili allora la loro unione è ancora misurabile e

$$\left| \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |A_i|$$

2. Se per gli $\{A_i\}$ del punto precedente vale $|A_i \cap A_j| \stackrel{i \neq j}{=} 0$, allora

$$\left| \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right| = \sum_{i=1}^{+\infty} |A_i|$$

3. Se A, B sono misurabili, allora

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Enunciamo ora un concetto importante:

Definizione 2.9

Diciamo che una proprietà vale **quasi-ovunque** se vale sempre a meno di un insieme a misura nulla (detto anche *a misura trascurabile*).

Si noti che il concetto appena definito non è immediato; ad esempio, dire che una funzione è *quasi ovunque continua* non equivale a dire che essa è *uguale ad una continua quasi ovunque*: per esempio una funzione continua quasi ovunque può avere salti, una uguale quasi ovunque ad una continua no.

2.1.2 Funzioni Misurabili

Ora che abbiamo un criterio per misurare gli insiemi, lo applichiamo in cerca di un criterio di misurabilità per le funzioni.

Definizione 2.10

Sia Ω misurabile, $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ positiva e limitata, allora si dice che f è **misurabile su Ω** se $\forall c \in \mathbb{R}$ risultano misurabili tutti i suoi *sottolivelli*:

$$f^{-1}((-\infty, c]) = \{x \in \Omega : f(x) \leq c\}$$

Ricordiamo che una funzione è limitata se $\exists m, M : m < f(x) < M \forall x \in \Omega$.

Se la funzione fosse negativa potrei considerare i suoi *sopralivelli* ed estendere opportunamente la definizione di misurabilità. Vedremo meglio questo concetto in seguito.

Definizione 2.11

Per una funzione limitata misurabile su Ω a *misura finita* partizioniamo l'intervallo $[m, M)$ nel codominio (m e M rispettivamente minorano e maggiorano la funzione f su Ω) in una serie di intervallini $[a_i, a_{i+1})$, con $a_0 = m$ e $a_n = M$; grazie a tale partizione "sezioniamo" il dominio Ω negli insiemi $\Omega_i := f^{-1}([a_i, a_{i+1}))$.

Definiamo allora **somma superiore**:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} |\Omega_i|$$

Definiamo **somma inferiore**:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i |\Omega_i|$$

Osserviamo che vale il seguente risultato:

$$0 \leq S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) |\Omega_i| = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M - m}{n} |\Omega_i| = \frac{M - m}{n} |\Omega| \xrightarrow{n} 0$$

Ovvero tutte le funzioni limitate misurabili su un insieme Ω misurabile sono integrabili secondo Lebesgue.

2.1.3 Integrale di Lebesgue

Ora dobbiamo estendere il concetto di integrabilità secondo Lebesgue.

Parte 1: Funzione limitata su dominio di misura finita: Dal risultato precedente possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 2.12

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di misura finita e $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ positiva e limitata. Definiamo l'**Integrale di Lebesgue** come:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f(x) dx = S_n = s_n$$

Parte 2: Funzione non negativa (non necessariamente limitata) su dominio di misura finita: Sia dunque $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ misurabile e non negativa con Ω a misura finita: consideriamo per ogni $\lambda > 0$ la funzione:

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} f(x) & f(x) \leq \lambda \\ \lambda & f(x) > \lambda \end{cases}$$

Per ogni λ esiste l'integrale $\int_\Omega f_\lambda$, che è funzione crescente di λ ; se esiste finito il seguente limite allora diremo che tale è il valore dell'integrale:

$$\int_\Omega f = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_\Omega f_\lambda$$

altrimenti diremo che f non è integrabile su Ω .

Parte 3: Funzione non negativa su dominio misurabile (ma non necessariamente di misura finita): Analogamente, se Ω è un insieme misurabile (ma non necessariamente limitato) e $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ è misurabile e non negativa, consideriamo per ogni $r > 0$ l'insieme $\Omega_r := \Omega \cap B_r$ (definizione 2.23). Se f è integrabile su Ω_r per ogni r ed esiste finito il seguente limite allora tale sarà il valore dell'integrale:

$$\int_\Omega f = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_r} f$$

altrimenti f non è integrabile su Ω .

Parte 4: Definizione generale: Includiamo anche le funzioni con parti negative. Possiamo quindi dare la definizione generale di integrabilità secondo Lebesgue.

Definizione 2.13

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue e sia $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ misurabile.

Si dice che f è **integrabile secondo Lebesgue su Ω** se le funzioni $f^+ := \max\{f, 0\}$ e $f^- := -\min\{f, 0\}$ sono integrabili su Ω , e in tal caso si pone:

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-$$

Osserviamo che f^+, f^- sono funzioni non-negative, pertanto è già stato definito per loro il concetto di integrabilità.

Vale il seguente criterio di integrabilità:

$$f \text{ è integrabile su } \Omega \Leftrightarrow f^+, f^- \text{ sono integrabili su } \Omega \Leftrightarrow |f| \text{ è integrabile su } \Omega$$

2.1.4 Teoremi sull'integrale di Lebesgue

Definizione 2.14

Dato Ω misurabile, definiamo $L^1(\Omega)$ l'insieme delle funzioni integrabili secondo Lebesgue su Ω .

Ciò che rende la teoria dell'integrazione di Lebesgue fruttuosa è il fatto che l'insieme L^1 sia ricco di proprietà, di cui una delle più importanti è espressa dal seguente teorema:

Teorema 2.15: di convergenza dominata o di Lebesgue

Sia $\{f_n\}$ successione di funzioni misurabili su Ω misurabile tale che:

1. $f_n \xrightarrow{qo} f$;
 2. $\exists g \in L^1(\Omega) : |f_n(x)| \stackrel{qo}{\leq} |g(x)|$;
- allora $f_n, f \in L^1(\Omega)$, inoltre:

$$\lim_n \int_\Omega f_n = \int_\Omega f = \int_\Omega \lim_n f_n$$

Il teorema permette una condizione di *scambio di limite e integrale* che può essere giustificato dalla teoria dell'integrazione secondo Riemann, e ha importantissime conseguenze nello sviluppo della teoria.

Enunciamo un altro importante (e famoso...) teorema:

Teorema 2.16: di Fubini

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un insieme misurabile e $f \in L^1(\Omega)$.

Se $\Omega \neq \mathbb{R}^{n+m}$ si estende con $f = 0$, allora :

1. Per q.o. $\xi \in \mathbb{R}^n, y \mapsto f(\xi, y)$ è misurabile e appartiene a $L^1(\Omega_\xi)$;
2. Per q.o. $\eta \in \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x, \eta)$ è misurabile e appartiene a $L^1(\Omega_\eta)$;
3. Valgono le seguenti formule di riduzione:

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\Omega_\xi} f(\xi, y) dy \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\Omega_\eta} f(x, \eta) dx \right) d\eta.$$

Dove con Ω_α si intende la restrizione di Ω ad α .

2.2 Spazi funzionali

Trattiamo ora gli spazi funzionali e ne descriviamo le principali proprietà.

2.2.1 Spazi vettoriali, normati e metrici

Di seguito una pletora di definizioni necessarie per proseguire nella teoria.

Definizione 2.17

\mathbf{X} è detto **spazio vettoriale** su \mathbb{R} e i suoi elementi sono detti vettori se è dotato di un'operazione interna, detta somma, e di un'operazione esterna, detta prodotto per scalare, dove per scalare si intendono gli elementi di \mathbb{R} , con le seguenti proprietà:

1. commutativa della somma: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
2. associativa della somma: $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{x} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{x})$
3. esistenza dell'elemento neutro della somma: $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
4. esistenza dell'elemento opposto della somma: $\mathbf{v} + (-\mathbf{v})$
5. distributiva del prodotto per scalare rispetto alla somma: $t(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = t\mathbf{v} + t\mathbf{w}$
6. distributiva del prodotto per scalare rispetto alla somma di scalari: $(t + u)\mathbf{v} = t\mathbf{v} + u\mathbf{v}$
7. associativa del prodotto per scalare: $t(u\mathbf{v}) = (tu)\mathbf{v}$
8. esistenza dell'elemento neutro del prodotto per scalare o normalizzazione: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Definizione 2.18

Si definisce **norma** su \mathbf{X} un'applicazione $\|\cdot\| : \mathbf{X} \mapsto \mathbb{R}$ tale che, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, e $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ valgono le seguenti proprietà:

1. Annullamento e positività: $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \|\mathbf{x}\| \geq 0$
2. Omogeneità: $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$
3. Disuguaglianza triangolare: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Definizione 2.19

Si definisce **spazio normato** la coppia spazio vettoriale e norma:

$$(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$$

Definizione 2.20

Si definisce **metrica** o **distanza** l'applicazione:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

La norma misura un singolo elemento, la metrica misura la distanza fra due elementi.

Definizione 2.21

Si definisce **spazio metrico** uno spazio normato munito di metrica.

Per completezza forniamo anche la seguente definizione:

Definizione 2.22

Si definisce **spazio topologico** la coppia (τ, \mathcal{A}) dove τ è un insieme e \mathcal{A} una famiglia di sottoinsiemi di τ detti aperti tali che:

1. τ e \emptyset appartengono a \mathcal{A} ;
2. Qualsiasi unione di elementi di \mathcal{A} appartiene ad \mathcal{A} ;
3. L'intersezione di un numero finito di elementi di \mathcal{A} appartiene ad \mathcal{A} .

Riportiamo ora, anche se ne abbiamo già fatto uso, la definizione di un'altro oggetto molto utile:

Definizione 2.23

Definiamo **palla** l'insieme così definito:

$$B_r(x) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$$

2.2.2 Spazi di Banach

La parola chiave quando si parla di questi spazi è *completezza*. Per capire di cosa si tratta, introduciamo il concetto di convergenza di una successione: da tale proprietà si possono caratterizzare ulteriormente gli spazi vettoriali.

Sia $\{u_m\}$ una successione: come già visto nei corsi precedenti, diciamo che la successione è *convergente* e cioè $\{u_m\} \rightarrow u$ in X se $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_X = 0$.

Definizione 2.24

Una successione $\{u_m\}$ è detta **fondamentale** o **di Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : m, n > m_\varepsilon \implies \|u_m - u_n\| < \varepsilon$$

Tutte le successioni convergenti sono fondamentali, ma non tutte le successioni fondamentali sono convergenti, o meglio, non è detto che convergano nello spazio in cui sono definite:

Esempio

La successione definita in $X = \mathbb{Q}$ come $(1 + \frac{1}{n})^n$ è fondamentale, tuttavia non converge ad un elemento di \mathbb{Q} , converge infatti al numero di Nepero e che non appartiene a \mathbb{Q} ma a \mathbb{R} .

Abbiamo bisogno di spazi dove questo non succeda, definiamo quindi cosa si intende per spazio di Banach:

Definizione 2.25

Uno spazio vettoriale normato $(X, \|\cdot\|_X)$ si dice **completo** o **di Banach** se ogni sua successione fondamentale è convergente in X .

Si noti come la completezza sia una caratteristica da attribuire alla coppia $(X, \|\cdot\|_X)$ dello spazio vettoriale e della norma in esso definita. Come si osserva dagli esempi seguenti, infatti, è possibile avere degli stessi spazi vettoriali completi rispetto a una norma e non completi rispetto ad un'altra.

Esempio

Si consideri lo spazio $X = C^0[0, 1]$ e la *norma lagrangiana*:

$$\|f\|_X = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Richiediamo che $f_n \rightarrow f$ ossia, dalla convergenza uniforme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| = 0$$

Ma se lo spazio considerato è $X = C^0[0, 1]$, le f_n continue convergeranno a una f continua. Di conseguenza lo spazio C^0 è completo rispetto alla norma lagrangiana.

Si consideri ora lo stesso spazio, $X = C^0[0, 1]$, e la *norma integrale* definita come:

$$\|f\|_X = \int_0^1 |f(x)| dx$$

Sia $f_n(x)$ la funzione definita come:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{n}{2} - nx & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

E la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

In questo caso si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

Le f_n , continue, convergono in norma integrale a f , non continua. Di conseguenza rispetto a tale norma lo spazio C^0 non è completo.

2.2.3 Spazi di Hilbert

Nel caso degli spazi di Banach abbiamo visto che la completezza discenda dall'unione di uno spazio vettoriale con un'opportuna norma. Uno spazio può dirsi di Hilbert solo se è completo quando abbinato a una particolare norma. Questa norma che presenteremo è fortemente legata al concetto di *prodotto scalare*.

Definizione 2.26

Sia X uno spazio vettoriale. Si dice **prodotto scalare** la funzione

$$(\cdot, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\forall x, y, z \in X$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1. Annullamento e positività: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. Simmetria: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$

3. Bilinearità $(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mu(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Definizione 2.27

Dato uno spazio vettoriale X e un prodotto scalare (\cdot, \cdot) su di esso, si definisce **norma indotta dal prodotto scalare** la funzione $\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X}$

Definizione 2.28

Uno **spazio di Hilbert** è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare completo rispetto alla norma indotta da tale prodotto.

Oltre alla completezza ci sono altre proprietà che giocano un ruolo importante nella teoria, per cui è bene averle presenti:

Definizione 2.29

Dato uno spazio normato X , un sottospazio $A \subset X$ si dice **compatto** se da ogni successione $\{x_n\} \subset A$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento di A .

Una definizione equivalente chiama compatto un insieme X tale che da ogni successione di valori in X si può estrarre una sottosuccessione convergente.

In \mathbb{R}^n questo concetto ha un'equivalente che permette una più facile individuazione di insiemi compatti:

Teorema 2.30: (o assioma) di Heine-Borel

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Allora E è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Definizione 2.31

Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|_X)$ si dice **separabile** se ammette un sottoinsieme numerabile denso.

Definizione 2.32

Un insieme A è detto **denso** in B se $A \subseteq B$ e $\bar{A} = B$ (dove \bar{A} è la chiusura di A).

Questa ultima condizione può essere esplicitata nella maniera seguente: $\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \|a - b\| \leq \varepsilon$.

2.2.4 Spazio ℓ^2

Non sempre con le norme fila tutto liscio, talvolta si possono presentare dei problemi: si consideri lo spazio vettoriale $X = \mathbb{R}^\infty$, spazio dei vettori in \mathbb{R} con infinite componenti. La norma euclidea $\|u\|_X^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$, facendo tendere n a ∞ , può dare luogo a una serie divergente che assume valori infiniti, contraddicendo la definizione di norma. Se si vuole evitare questo problema occorre scegliere sapientemente lo spazio su cui si vuole operare.

Definizione 2.33

Lo spazio vettoriale $\ell^2 \subset \mathbb{R}^\infty$ è lo spazio delle successioni $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ tali che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$.

Su ℓ^2 definiamo una norma:

$$\|a\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2}$$

e un prodotto scalare:

$$(u, v)_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$$

Analizziamo le sue proprietà.

Teorema 2.34

Lo spazio ℓ^2 è separabile.

Dimostrazione

Essendo ogni \mathbb{R} di \mathbb{R}^∞ denso in \mathbb{Q} , ℓ^2 è denso in \mathbb{Q}^∞ .

Teorema 2.35

Lo spazio ℓ^2 è di Hilbert.

Dimostrazione

Tenendo presente il prodotto scalare che prima abbiamo definito, consideriamo due vettori: u e v appartenenti a ℓ^2 . Proprio a causa della loro appartenenza le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$ convergono. Usiamo disuguaglianza di Young (vedi il successivo teorema 2.45): si ha che

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2} u_n^2 + \frac{1}{2} v_n^2$$

Segue che $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ converge assolutamente, quindi il prodotto scalare esiste sempre finito. Non riportiamo la dimostrazione della completezza.

2.2.5 Spazi L^p

Uniamo i risultati ottenuti dall'integrazione di Lebesgue a quelli degli spazi funzionali, il risultato è la definizione degli spazi L^p .

Riprendiamo la definizione di spazio L^1 :

Definizione 2.36

Dato Ω misurabile, definiamo $L^1(\Omega)$ l'insieme delle funzioni integrabili secondo Lebesgue su Ω .

Ricordiamo che una proprietà vale *quasi ovunque* se è valida a meno di insiemi a misura nulla, questi possono essere detti *trascurabili*.

Aggiungiamo il tassello fondamentale:

Definizione 2.37: di spazio L^p

Sia $p \in \mathbb{R}$ con $p \in [1, +\infty)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue.

Definiamo

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ misurabile}; \quad |f|^p \in L^1(\Omega)\} \\ &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ misurabile}; \quad \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\} \end{aligned}$$

Definizione 2.38

Per ogni $f \in L^p(\Omega)$ definiamo la **norma** in L^p come la funzione:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Un discorso leggermente diverso merita il caso $p = \infty$: iniziamo definendo l'estremo superiore essenziale:

Definizione 2.39

Si definisce **estremo superiore essenziale** di una funzione f non negativa e misurabile su Ω il valore k :

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} f(x) := \inf\{k : f(x) < k \text{ q.o. in } \Omega\}$$

Definizione 2.40

Se $\text{ess sup}_{x \in \Omega} f(x) = +\infty$ diremo che f è **essenzialmente illimitata**.

Nel caso in cui l'estremo superiore essenziale esistesse finito, f si direbbe invece **essenzialmente limitata**.

Esempio

La funzione $f(x) = x$ è essenzialmente *illimitata*;

al contrario la funzione $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$ è essenzialmente *limitata*. Questo esempio rimarca l'effetto del "quasi ovunque".

Possiamo ora trattare il caso L^∞ : è lo spazio delle funzioni essenzialmente limitate.

Definizione 2.41

Definiamo

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}; \quad f \text{ misurabile; } \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty\}$$

Definizione 2.42

Per ogni $f \in L^\infty(\Omega)$ definiamo la **norma** in L^∞ come la funzione:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Definizione 2.43

Diremo che una serie di funzioni $f_n \in L^p(\Omega)$ converge a $f \in L^p(\Omega)$, cioè

$$f_n \xrightarrow{L^p} f$$

se e solo se

$$\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$$

Si noti che ai fini della convergenza in L^p è richiesta l'appartenenza a questo spazio sia alla funzione f che a ogni funzione f_n della serie.

2.2.6 Disuguaglianza di Hölder

Affrontiamo ora lo studio della disuguaglianza di Hölder. Iniziamo introducendo la seguente definizione:

Definizione 2.44

Due scalari $p, q \in [1, \infty]$ si dicono **coniugati** se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Per convenzione si pone $\frac{1}{\infty} = 0$.

È evidente che la relazione di coniugazione è simmetrica. Si noti inoltre che, quando $p, q \neq \infty$, p e q sono coniugati se e solo se $p + q = pq$.

Esempi di coppie di numeri coniugati sono: $1 - \infty$, $4 - \frac{4}{3}$, $3 - \frac{3}{2}$, $2 - 2$. Si noti che 2 è l'unico numero coniugato con sé stesso.

Introduciamo un utile risultato, che generalizza la già nota disuguaglianza $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$:

Teorema 2.45: disuguaglianza di Young

Siano p, q coniugati.

Allora $\forall a, b > 0$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Dimostrazione

Definiamo $\varphi(a, b) := ab - \frac{a^p}{p} - \frac{b^q}{q}$. Il nostro obiettivo è dimostrare che $\varphi(a, b) \leq 0$ su \mathbb{R}_+^2 .

Sugli assi, $\varphi = 0$. Calcoliamo le derivate parziali: $\frac{\partial \varphi}{\partial a} = b - a^{p-1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b} = a - b^{q-1}$.

Consideriamo ora φ sul luogo dei punti dove $\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$:

$$\varphi(a, b = a^{p-1}) = a^p - \frac{a^p}{p} - \frac{a^{(p-1)q}}{q} = a^p \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) = 0$$

In maniera analoga $\varphi(a = b^{q-1}, b) = 0$.

Teorema 2.46: disuguaglianza di Hölder

Siano p, q coniugati, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$.

Allora $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Dimostrazione

Nel caso $p = 1, q = \infty$ la disuguaglianza è banale:

$$\|fg\|_1 = \int_{\Omega} |fg| \leq \text{ess sup } |g| \cdot \int_{\Omega} f = \|g\|_{\infty} \cdot \|f\|_1$$

Occupiamoci ora del caso generale, con p e q finiti:

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int_{\Omega} |fg| = \int_{\Omega} \left| \frac{\|g\|_q^{1/p} f}{\|f\|_p^{1/q}} \cdot \frac{\|f\|_p^{1/q} g}{\|g\|_q^{1/p}} \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{p/q}} \frac{|f|^p}{p} + \frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{q/p}} \frac{|g|^q}{q} \right] && \text{(per la disuguaglianza di Young)} \\ &= \frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{p/q}} \frac{\|f\|_p}{p} + \frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{q/p}} \frac{\|g\|_q}{q} \\ &= \frac{\|g\|_q \|f\|_p}{p} + \frac{\|g\|_q \|f\|_p}{q} && \text{(ricordando che } p - \frac{p}{q} = 1) \\ &= \|g\|_q \|f\|_p \end{aligned}$$

Enunciamo un'immediata e importante conseguenza della disuguaglianza.

Teorema 2.47: effetto della disuguaglianza di Hölder sulle norme L^p

Sia $\Omega \subset \mathbb{P}^n$ tale che $|\Omega| < +\infty$.

Se $1 \leq p < r < +\infty$ allora $L^r(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ e vale la disuguaglianza

$$\|f\|_p^p \leq |\Omega|^{\frac{(r-p)}{r}} \cdot \|f\|_r^p \quad \forall f \in L^q(\Omega)$$

Inoltre, purché f sia misurabile, vale

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$$

Dimostrazione

Applichiamo la disuguaglianza di Hölder, ricordando che il coniugato di $\frac{r}{p}$ è $\frac{r}{r-p}$:

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p &= \int_{\Omega} 1 \cdot |f|^p \\ &= \|1 \cdot |f|^p\|_1 \\ &\leq \| |f|^p \|_{r/p} \cdot \|1\|_{(r-p)/r} \\ &= \left[\int_{\Omega} (|f|^p)^{r/p} \right]^{p/r} \cdot \left[\int_{\Omega} 1^{r/(r-p)} \right]^{(r-p)/r} \\ &= \|f\|_r^p \cdot |\Omega|^{(r-p)/r}\end{aligned}$$

Segue che $\|f\|_r < +\infty \implies \|f\|_p < +\infty$, e dunque $L^r(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.

Il risultato si estende anche al caso $r = +\infty$.

Per dimostrare la seconda parte, importante legame fra essenziale limitatezza e integrabilità, si fa uso della convergenza puntuale.

La richiesta sulla finitezza di Ω è molto importante: per $|\Omega| = +\infty$, la funzione costante $f(x) = 1$ è limitata e dunque appartiene a $L^\infty(\Omega)$ pur non appartenendo ad alcun $L^p(\Omega)$ con p finito.

Dalla disuguaglianza di Hölder segue un'altra importante disuguaglianza che enunciamo omettendo la dimostrazione.

Teorema 2.48: disuguaglianza di Minkowski

Sia $p \geq 1$, e siano $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$.

Allora $f + g \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

2.2.7 Caratteristiche degli spazi L^p

Ripensando alla trattazione che abbiamo svolto sugli spazi funzionali ci chiediamo: quando gli spazi L^p hanno quelle caratteristiche tali da potersi definire di Banach o di Hilbert?

Teorema 2.49: importanti proprietà degli spazi L^p

Per $1 \leq p < \infty$, L^p è separabile.

L^∞ è l'unico spazio L^p non separabile.

L^2 è l'unico spazio di Hilbert di tipo L^p , con il prodotto scalare $(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} u \cdot v \, d\omega$.

Dimostrazione

Riportiamo un cenno della dimostrazione: per dimostrare la separabilità degli spazi L^p con $p < \infty$, si approssimano le funzioni f a loro appartenenti con funzioni \tilde{f} costanti a tratti e a valori razionali. Evidentemente, si può costruire una successione \tilde{f}_n e avvicinarsi arbitrariamente a una f data, da cui si può dedurre la densità del sottoinsieme; poi si dimostra la sua numerabilità a partire dalla numerabilità dell'insieme \mathbb{Q} .

Notiamo che L^∞ non è separabile.

È fondamentale sapere che L^2 è di Hilbert, con *prodotto scalare*

$$(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} u \cdot v \, d\omega$$

e *norma indotta*

$$\|u\|_2 := \left(\int_{\Omega} |u|^2 \right)^{1/2}$$

Non è possibile effettuare questa costruzione in *altri* spazi L^p . Dunque L^2 è uno spazio **estremamente importante**.

Vale in oltre il seguente teorema:

Teorema 2.50: di Riesz

Ogni spazio di Hilbert separabile è isomorfo a ℓ^2 . In particolare, esso ammette una base numerabile.

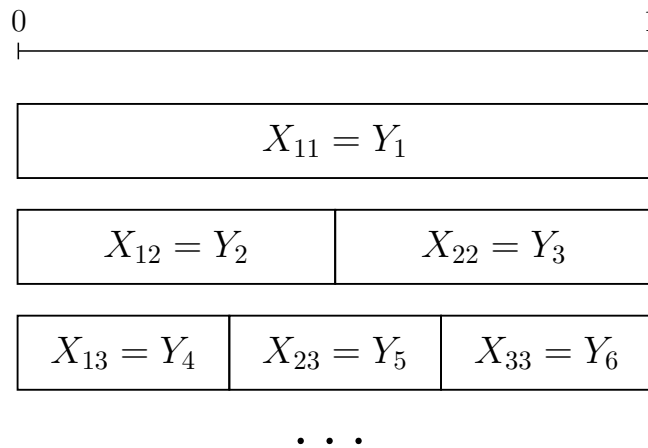
Ci chiediamo, la convergenza in L^p implica la convergenza quasi ovunque?

Sappiamo già che la convergenza uniforme, altrimenti detta in L^∞ , implica la convergenza puntuale, ovvero quasi ovunque. Questo risultato non è estendibile a p generici, come mostra il controesempio della *macchina da scrivere*.

(Il testo e l'illustrazione qui riportati, opportunamente adattati, sono stati orgogliosamente tratti da AA.VV, *Appunti di Probabilità*, Edizione L^2 , Fubini-Tonelli, Milano 2017, p. 185.)

Si considerino le funzioni $g_{jk} = \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{k}; \frac{j}{k}]}$, con $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq j \leq k$. Si faccia poi corrispondere a ogni g_{jk} una f_i , in modo da avere un solo indice: $g_{11} = f_1, g_{12} = f_2, g_{22} = f_3, g_{13} = f_4 \dots$

Notiamo che $f_n \xrightarrow{L^1} 0$, infatti $\|f_n\| \rightarrow 0$ ($\|f_n\|$ è l'area sottesa); ma $f_n \not\xrightarrow{qo} 0$. Anzi, $\liminf_n f_n(x) = 0$ e $\limsup_n f_n(x) = 1, \forall x \in [0, 1]$: il limite della successione nemmeno esiste (perché i limiti inferiore e superiore non coincidono), men che meno c'è convergenza!



Tuttavia, è possibile dimostrare questo risultato:

Teorema 2.51

Se $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\Omega)$, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque.

Nel caso della macchina da scrivere, la sottosuccessione convergente è quella con $n_k = 2^k$.

2.3 Funzioni Test e Distribuzioni

2.3.1 Funzioni test e spazio \mathcal{D}

Iniziamo in questa parte a introdurre alcuni strumenti, le funzioni test e le distribuzioni, che si riveleranno fondamentali in molti ambiti, in particolare nello studio delle equazioni a derivate parziali. Come vedremo in seguito, le distribuzioni sono oggetti che assomigliano alle funzioni e in un certo senso le generalizzano, includendo oggetti molto particolari. Le funzioni test al contrario sono funzioni vere e proprie caratterizzate dall'essere estremamente regolari.

Iniziamo con l'introdurre la nozione di *supporto*:

Definizione 2.52

Sia $f \in C^0(\Omega)$. Il **supporto** di f è definito come la chiusura della controimmagine non nulla di f , ovvero:

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Esempio

$\text{supp } [x] = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$. Notiamo che, poiché il supporto è chiuso, 0 vi è incluso.

Caratterizziamo ora le **funzioni test** definendo lo spazio a cui appartengono: ossia lo spazio delle funzioni C^∞ a supporto compatto:

Definizione 2.53

Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$, detto altrimenti $C_c^\infty(\Omega)$, è così definito:

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } f \text{ è compatto} \}$$

Per la definizione di compatto si veda 2.29. Le due richieste alle funzioni $\mathcal{D}(\Omega)$ sono estremamente forti: richiedono che la funzione valga zero al di fuori di un qualche supporto compatto, ma venga raccordata con i punti all'interno di esso in maniera liscia, ovvero C^∞ .

Gli esponenziali, grazie alla notevole proprietà $\frac{\partial}{\partial x} e^x = e^x$ (autofunzioni dell'operatore derivata), si prestano bene a soddisfare questo tipo di proprietà.

Esempio

La seguente può essere considerata una funzione test:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{|x^2|-1}\right\} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Osserviamo una proprietà notevole dello spazio appena considerato:

Teorema 2.54: $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in L^p

Se Ω è misurabile allora $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in L^p per $1 \leq p < \infty$

Formalmente questo significa che

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} |f - \varphi_\varepsilon|^p < \varepsilon$$

Questo risultato è importantissimo: esso infatti permette di approssimare una qualsiasi funzione in $L^p(\Omega)$ con una in $\mathcal{D}(\Omega)$ e per la proprietà di densità è possibile fare ciò con qualsiasi approssimazione ($\forall \varepsilon$)!

Questo significa che

$$\forall f \in L^p(\Omega), \exists \{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega) : \varphi_n \xrightarrow{L^p} f$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f - \varphi_n|^p = 0$$

Si noti che per $p = \infty$ il teorema non è più valido.

Abbiamo appena definito un nuovo spazio, $\mathcal{D}(\Omega)$, restringendo $C^\infty(\Omega)$, uno degli spazi più "piccoli" a noi noti: esso infatti racchiude solo funzioni molto regolari e particolari, poche rispetto all'infinità di funzioni esistenti. Ora faremo l'operazione contraria: allarghiamo uno spazio caratterizzato da condizioni più "deboli".

2.3.2 Convergenza in \mathcal{D} **Definizione 2.55**

Il vettore $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{N}^n$, con $\alpha_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, \dots, n$, è detto **multi-indice**.

Indicheremo la somma delle componenti con $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Dati una funzione $f = f(x_1, \dots, x_n)$ e un multi-indice α , indicheremo con D^α l'operatore di *derivata parziale multipla* di una funzione:

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f$$

Ovvero, si deriverà f nella variabile x_1 per α_1 volte, in x_2 per α_2 volte, e così via per tutte le componenti del multi-indice.

Definizione 2.56

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, φ_k una successione di funzioni in $\mathcal{D}(\Omega)$, e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si dice che la successione **converge in $\mathcal{D}(\Omega)$** (e si scriverà $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$) se sono rispettate le seguenti due condizioni:

1. $\exists K$ compatto, con $K \subset \Omega$, tale che $\text{supp } \varphi_k \subset K \quad \forall k$;
2. $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente in Ω (o in K) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Spieghiamo brevemente il significato di queste due richieste: La prima richiede l'esistenza un insieme limite K compatto oltre al quale i supporti delle φ_k non si espandono. Considerata la natura delle funzioni $\mathcal{D}(\Omega)$, questo equivale a chiedere che esista una striscia di bordo $K^C = \Omega \setminus K$ nella quale tutte le funzioni della successione si annullano.

La seconda chiede che ogni derivata di φ , sia essa parziale, multipla e/o mista, converga uniformemente al proprio limite. In altre parole, è una condizione di *convergenza uniforme di ordine infinito*.

Si noti come le richieste sulle φ_k siano particolarmente stringenti, perfino per funzioni già molto regolari come le \mathcal{D} .

2.3.3 Spazi L^p_{loc}

Definizione 2.57

Definiamo lo spazio L^p locale come:

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f \in L^p(K) \quad \forall K \subset \Omega, K \text{ compatto}\}$$

Per le funzioni che appartengono a tali spazi, di conseguenza, ci si disinteressa del comportamento sulla frontiera ma si valuta l'appartenenza o meno in L^p solamente all'interno di Ω .

Come intuibile e chiarificabile dall'esempio seguente, uno spazio generico $L^p_{loc}(\Omega)$ contiene lo spazio $L^p(\Omega)$ (per Ω misurabili). Sto quindi allargando gli spazi L^p , quasi "imbruttendoli".

Esempio

La funzione $f(x) = \frac{1}{x} \notin L^1(0, 1)$ ma $f(x) = \frac{1}{x} \in L^1_{loc}(0, 1)$. Allo stesso modo $f(x) = e^x \notin L^1(\mathbb{R})$ ma $f(x) = e^x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Lo spazio L^p_{loc} è uno spazio vettoriale, su cui tuttavia non è possibile definire una norma. E' però possibile avere una convergenza secondo la seguente definizione:

Definizione 2.58

Diciamo che una successione $\{u_k\} \in L^p_{loc}(\Omega)$ converge a $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ in L^p_{loc} se $u_k \rightarrow u$ in $L^p \quad \forall K$ compatto $\subset \Omega$

Teorema 2.59: inclusione degli L^p locali

Se $p > q$ e $1 \leq p \leq \infty$, allora $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega)$.

Da questa catena di inclusioni si evince che lo spazio che contiene tutti gli altri è $L^1_{loc}(\Omega)$: dunque anche funzioni "brutte" vi possono appartenere. Come detto prima, quello più "elitario" è $\mathcal{D}(\Omega)$.

L'obiettivo sarà quello di far "combaciare" i due spazi.

Si consideri $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Considerando $\int_{\Omega} f\varphi$, si ha che questo coincide con lo stesso integrale calcolato su $\text{supp } \varphi$, per le proprietà di φ di annullarsi all'infinito.

Teorema 2.60

Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_{\Omega} f\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Allora $f = 0$ quasi ovunque in Ω .

Dimostrazione

Per assurdo $f \neq 0$ quasi ovunque. Questo significa che $\exists \Omega'$ a misura non nulla in cui $f \neq 0$. Ma allora considerando $\mathcal{D}(\Omega')$ si ha che $\int_{\Omega'} f\varphi \neq 0$, da cui segue la tesi.

Considerando $f, \varphi \in L^2(\Omega)$, $\int_{\Omega} f\varphi = 0$ significa che f è ortogonale a $L^2(\Omega)$ e dunque $f \in (L^2(\Omega))^{\perp} = \{0\}$. (Con la notazione V^{\perp} si intende il *complemento ortogonale* di V , ovvero l'insieme dei vettori di un sottospazio di V ortogonali ai vettori di V stesso.)

Ma essendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso in $L^2(\Omega)$, ciò significa che $f \perp \mathcal{D}(\Omega)$ e $\int_{\Omega} f\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2.3.4 Distribuzioni e spazio \mathcal{D}'

Vogliamo ora ampliare ulteriormente la classe L^1_{loc} , la quale, come visto, include molte funzioni “brutte” da integrare. Non opereremo un semplice ampliamento come abbiamo nel paragrafo precedente, ma definiremo un nuovo oggetto matematico, le *distribuzioni*, che non sono più funzioni in senso stretto, bensì di una loro generalizzazione.

Definizione 2.61

Si dice **distribuzione su Ω** un *funzionale lineare e continuo* su $\mathcal{D}(\Omega)$ a valori reali:

$$\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \Lambda = \Lambda(\varphi) = \Lambda(\varphi(x))$$

Per “continuità su $\mathcal{D}(\Omega)$ ” si intende che:

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \implies \Lambda(\varphi_k) \rightarrow \Lambda(\varphi)$$

L'insieme di queste distribuzioni è detto $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Si noti che la “continuità su $\mathcal{D}(\Omega)$ ” è un concetto identico alla normale continuità delle funzioni a valori reali: se una successione converge a un limite sul dominio, allora i corrispondenti valori sul codominio convergono al valore della funzione nel limite.

Le distribuzioni sono dunque degli “operatori” che ricevono in ingresso $\varphi = \varphi(x)$, una funzione $\mathcal{D}(\Omega)$, e ad essa associano un valore reale. Esempi di *funzionali* già ben noti (seppure la funzione-argomento non sia necessariamente \mathcal{D}) sono la norma di una funzione rispetto a un qualsiasi spazio L^p o il determinante di un'applicazione lineare.

Per quanto riguarda la linearità, è utile immaginare che siano l'equivalente funzionale del caso delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (invece che $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$): in tal caso, le funzioni lineari sono quelle della forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$.

Si tenga presente che, per quanto riguarda le distribuzioni e in generale negli spazi a dimensione infinita, **la linearità non implica la continuità**, come invece succede per le funzioni ad argomento in \mathbb{R}^n ; pertanto è necessario esplicitare entrambe le richieste. Vediamo un controesempio:

Esempio

Si consideri il seguente funzionale:

$$\Lambda : \mathbb{R}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \{a_n\} \mapsto \Lambda(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$$

È immediato capire che Λ è lineare, tuttavia si può dimostrare che non è continuo. Infatti, preso un arbitrario $\varepsilon > 0$ e presa la successione $a_n = \varepsilon \frac{1}{n}$, che appartiene a ℓ^2 . Per $\varepsilon \rightarrow 0$, $a_n \rightarrow 0$ in ℓ^2 , ma

$$\Lambda(a_n) = \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \text{ per ogni } \varepsilon.$$

Da questo controesempio si intuisce, tra l'altro, che la limitatezza della Λ è condizione necessaria per la sua continuità.

Possiamo ricavare una distribuzione a partire da una funzione:

Teorema 2.62: distribuzione definita da una funzione in L^1_{loc}
 Data la funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ arbitraria, si definisca il funzionale

$$\Lambda_u(\varphi) := \int_{\Omega} u \varphi$$

avente u come parametro e φ come argomento.
 Allora Λ è una distribuzione.

Dimostrazione

La linearità di Λ discende immediatamente da quella dell'integrale.
 Dimostrare la continuità significa dimostrare la seguente implicazione:

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \implies \Lambda_u(\varphi_k) \rightarrow \Lambda_u(\varphi) \text{ ovvero } \int_{\Omega} u \varphi_k \rightarrow \int_{\Omega} u \varphi$$

Per farlo, calcoliamo il valore assoluto dell'integrale differenza:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} u(\varphi_k - \varphi) \right| \\ &= \left| \int_K u(\varphi_k - \varphi) \right| && \text{(ipotesi della convergenza in } \mathcal{D}) \\ &\leq \underbrace{\|u\|_{L^1(K)}}_{<+\infty} \underbrace{\|\varphi_k - \varphi\|_{L^\infty(K)}}_{\rightarrow 0} && \text{(per la disuguaglianza di Hölder)} \\ &\rightarrow 0 && \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è fatto uso che u , in quanto appartenente a L^1_{loc} , è integrabile su un compatto e pertanto ha norma finita.

Concludendo, con un lieve abuso di scrittura è possibile affermare la seguente "inclusione":

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

Essa *non* va presa letteralmente, perché gli insiemi sono composti da due tipi diversi di funzioni. Ciò che davvero afferma è che, data una qualsiasi funzione in L^1_{loc} , si può costruire una distribuzione ad essa associata; c'è dunque una relazione iniettiva tra gli spazi L^1_{loc} e \mathcal{D}' .

Tuttavia, tale relazione non è biunivoca, ovvero l'"inclusione" non è stretta, similmente a quanto succede per le funzioni lineari da \mathbb{R} in \mathbb{R} (ad ogni α è associata una $f(x) = \alpha x$, ma queste non sono tutte le funzioni lineari possibili: sono escluse quelle della forma $f(x) = \alpha x + \beta$). Introduciamo ora un'importante distribuzione che è anche un controesempio a favore dell'affermazione delle righe precedenti.

Un altro modo per scrivere la distribuzione $\Lambda(\varphi)$ è $\langle \Lambda, \varphi \rangle$. Questa notazione prende il nome di *crochet* o *dualità*, e serve a ricordare la linearità e la continuità dell'operatore. Inoltre, se $\Lambda \in L^1_{loc}(\Omega)$, avvalendoci dell'esistenza fornita dal teorema, faremo coincidere la distribuzione con il prodotto scalare:

$$\langle \Lambda, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \Lambda \varphi$$

2.3.5 Delta di Dirac

Definizione 2.63

La **delta di Dirac in y** , con $y \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$, è la distribuzione così definita:

$$\delta_y : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \delta_y(\varphi) = \varphi(y)$$

Esercizio

Mostrare che:

$$\delta_y \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

Suggerimento: occorre verificare linearità e continuità del funzionale.

Resta da verificare che:

$$\delta_y \notin L^1_{loc}(\Omega)$$

ovviamente quest'ultima appartenenza *non* va intesa in modo letterale: L^1_{loc} è uno spazio di funzioni mentre δ_y è un funzionale.

Per assurdo si supponga che $\delta_y \in L^1_{loc}(\Omega)$: esiste dunque una funzione $u \in L^1_{loc}$ tale che

$$\varphi(y) = \int_{\Omega} u \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

per via della proposizione 2.62. Presa un'arbitraria funzione $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{y\})$, per la topologia delle funzioni \mathcal{D} e poiché il punto y appartiene alla frontiera della regione di definizione di ψ , necessariamente $\psi(y) = 0$. Di conseguenza

$$\int_{\Omega} u \psi = \psi(y) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{y\})$$

Ma allora, per il teorema 2.60 si ha che $\psi = 0$ quasi ovunque in $\Omega \setminus \{y\}$, ovvero quasi ovunque in Ω (il quasi ovunque non dà importanza ai singoli punti). Avendo ora aggiunto il punto y al dominio, è dunque lecito scrivere che $\int_{\Omega} u \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, che è falso per ogni funzione tale che $\varphi(y) \neq 0$: siamo dunque all'assurdo.

2.3.6 Convergenza in \mathcal{D}' **Definizione 2.64**

Siano $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribuzione e $\omega \subseteq \Omega$ un aperto.

Si dice che **la distribuzione si annulla in ω** se $\langle \Lambda, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$.

Definizione 2.65

Si dice **supporto nel senso delle distribuzioni** di una distribuzione $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ l'insieme complementare, rispetto a Ω , del più grande aperto in cui Λ si annulla (nel senso di cui sopra).

Esso si indica con $\text{supp } \Lambda$.

Esempio

La delta di Dirac si annulla nell'aperto $\omega = \{y\}^c = \Omega \setminus \{y\}$.

Infatti, per definizione di annullamento $\langle \delta_y, \varphi \rangle = \varphi(y) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, e tutte le funzioni in $\mathcal{D}(\Omega \setminus \{y\})$ si annullano in y per la loro peculiare topologia.

Il supporto della delta è dunque un unico punto: $\text{supp } \delta_y = \{y\}$.

Definizione 2.66

Sia Λ_k una successione di distribuzioni in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Si dice che la successione **converge in $\mathcal{D}'(\Omega)$** (o converge nel senso delle distribuzioni) se:

$$\langle \Lambda_k, \varphi \rangle \xrightarrow{k} \langle \Lambda, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

e si scrive $\Lambda_k \rightarrow \Lambda$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Questa è dunque un equivalente della *convergenza puntuale* nelle funzioni a valori reali, eccetto che qui i "punti" sono funzioni test.

Teorema 2.67: approssimazione della Delta di Dirac

Sia u una funzione in $L^1(\mathbb{R}^n)$ (quindi anche in L^1_{loc} e \mathcal{D}') tale che $u \geq 0$ qo e che $\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$.
 Si definisca la seguente successione di funzioni:

$$u_k(x) := k^n u(kx) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Allora:

$$\langle u_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Dimostrazione

Il limite della successione (per $k \rightarrow +\infty$) è una forma indeterminata $0 \cdot \infty$ (affinché sia L^1 , u infatti dev'essere necessariamente infinitesima per $kx \rightarrow +\infty$), eccetto che in $x = 0$, punto in cui il limite è infinito se $u(0) \neq 0$. Tuttavia, grazie alla sostituzione $y = kx$ si osserva il seguente risultato:

$$\|u_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} u(kx) k^n dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) dy = 1$$

Sia ora $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ un'arbitraria funzione test. Per dimostrare la convergenza della tesi, è necessario calcolare il modulo della differenza tra la successione e limite, ricordando che la funzione u è positiva:

$$\begin{aligned} |\langle u_k, \varphi \rangle - \varphi(0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u_k \varphi) - \varphi(0) \right| && (u_k \in L^1_{loc}) \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(kx) \varphi(x) k^n dx - \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} u(y) dy \right| && (\int u = \|u\| = 1 \text{ per ipotesi}) \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \varphi\left(\frac{y}{k}\right) dy - \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} u(y) dy \right| && (\text{sostituendo } y = kx) \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \left[\varphi\left(\frac{y}{k}\right) - \varphi(0) \right] dy \right| && (\text{linearità dell'integrale}) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \left| \varphi\left(\frac{y}{k}\right) - \varphi(0) \right| dy && (\text{disuguaglianza triangolare}) \end{aligned}$$

Utilizziamo ora la convergenza dominata: l'integranda $u(y) \left| \varphi\left(\frac{y}{k}\right) - \varphi(0) \right| \xrightarrow{k} u(y) |\varphi(0) - \varphi(0)| = 0$ per ogni y su cui u è definita, ovvero qo in \mathbb{R}^n , ed essa è dominata dalla funzione $u(y) 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, la quale appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$. È dunque possibile operare lo scambio di limiti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y) \left| \varphi\left(\frac{y}{k}\right) - \varphi(0) \right| dy \xrightarrow{k} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) |\varphi(0) - \varphi(0)| dy = 0$$

Da questa proposizione ricaviamo che la delta di Dirac centrata in 0 è approssimata da una funzione che tende all'infinito in 0; siccome è noto che δ_y si annulla in ogni punto eccetto che in y , si può affermare che *solo "moralmente"* che δ_0 valga 0 ovunque all'infuori dello 0, dove vale $+\infty$.

Diamo ora una definizione di notevole importanza: vediamo come si comporta la derivazione con le distribuzioni. A causa della forte irregolarità di questi oggetti la derivazione ha senso solo quando la consideriamo all'interno della dualità.

Definizione 2.68

Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribuzione e α un multi-indice.
 Definiamo la **derivata della distribuzione** $D^\alpha u$ come quella distribuzione data da:

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

In un esercizio tale dualità deve essere ulteriormente sviluppata attraverso le formule di derivazione per parti per poter tornare alla dualità con ϕ .

2.3.7 Valore principale

Studiamo ora il *valore principale* precedentemente introdotto come una distribuzione. Si consideri il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} dx$$

È noto fin dall'analisi I che l'integrale diverga, ma essendo $\frac{1}{x}$ una funzione dispari, sembra naturale che il suo integrale abbia valore nullo. D'altronde, se si integra sul compatto $(-R, R)$ invece che su tutto \mathbb{R} , l'integrale converge per ogni R perché $\frac{1}{x} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, e in particolare ha proprio valore nullo.

Si definisca la seguente funzione indicatrice:

$$\chi_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } |x| > \varepsilon \\ 0 & \text{per } |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Definizione 2.69

Il **valore principale** di $\frac{1}{x}$ è definito nel seguente modo:

$$\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\chi_\varepsilon(x)}{x}$$

Si noti che $\frac{\chi_\varepsilon(x)}{x} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: l'infinitesimo non integrabile per $x \rightarrow \pm\infty$ è stato eliminato dalla richiesta di integrabilità locale piuttosto che sull'insieme illimitato \mathbb{R} , e la singolarità in $x = 0$ è stata eliminata dalla presenza di $\chi_\varepsilon(x)$ che è ivi nulla. Pertanto, presa una funzione test φ non nulla su un compatto della forma $(-R, R)$, la dualità può essere scritta come prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\chi_\varepsilon(x)}{x}, \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_\varepsilon(x)}{x} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-R}^R \frac{\chi_\varepsilon(x)}{x} \varphi(x) dx && \text{(per un certo } R) \\ &= \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{\varphi(x)}{x} dx && \text{(per definizione di } \chi) \\ &= \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(0) \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{1}{x} dx && \left(\int \frac{1}{x} = 0 \text{ se l'intervallo è simmetrico} \right) \\ &= \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx && \text{(linearità dell'integrale)} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| < R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx && \text{(integrale ben definito)} \end{aligned}$$

Applicare il valore principale è dunque equivalente all'applicare la corrispondente distribuzione. È possibile dimostrare che il valore principale sia effettivamente lineare e continuo, ma non a supporto compatto.

2.3.8 Funzioni a decrescita rapida e distribuzioni temperate

Nella definizione di funzioni test abbiamo incluso "pochissime" in quanto i requisiti sono estremamente stringenti: la condizione di funzioni test è estremamente elitaria, per cui può essere utile trovare un compromesso che possa includere anche funzioni che, pur essendo "molto lisce" non possono essere considerate funzioni test. Viceversa lo spazio delle distribuzioni temperate può essere troppo inclusivo e per certe applicazioni sono necessarie funzioni con un minimo di regolarità.

Definizione 2.70

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Se $\forall \alpha$ multi-indice e $\forall m \geq 0$ abbiamo

$$|x|^m D^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Allora diremo che f è una **funzione a decrescita rapida** e indicheremo con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio di tali funzioni.

Dunque questo genere di funzioni vanno a zero velocemente pur non essendo a supporto compatto. Un esempio può essere $f(x) = e^{-|x|^2}$.

Come abbiamo fatto per le funzioni test, anche per le funzioni a decrescita rapida possiamo definire un tipo di convergenza:

Definizione 2.71

Sia $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una successione di funzioni a decrescita rapida. Diremo che la successione **converge** a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se:

$$\forall m > 0 \quad |x|^m D^\alpha f_k \xrightarrow{L^\infty} |x|^m D^\alpha f$$

Notiamo quindi che possiamo scrivere:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Inoltre tutte le successioni convergenti in \mathcal{D} lo sono anche in \mathcal{S} .

Abbiamo visto una versione “indebolita” delle funzioni test, ora vediamo un’analogo per le distribuzioni che sia un sottospazio dell’insieme \mathcal{D}' .

Definizione 2.72

Si dice **distribuzione temperata** un funzionale lineare e continuo su \mathcal{S} a valori reali tale che per ogni successione $\{f_k\}_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $f_k \rightarrow f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\Lambda : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \quad \Lambda(f_k) \rightarrow \Lambda(f)$$

Indicheremo con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ lo spazio di tali funzionali.

Definizione 2.73

Sia $u_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ una successione di distribuzioni temperate. Diremo che la successione **converge** a $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (nel senso delle distribuzioni temperate) se:

$$\langle u_n, f \rangle \rightarrow \langle u, f \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

In modo analogo ma opposto a quanto visto prima, abbiamo che

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

in quanto se $\Lambda : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è una distribuzione temperata allora $\Lambda : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è sicuramente una distribuzione. Attenzione però: si può facilmente verificare che l’inclusione è stretta.

3 Serie di Fourier e trasformate integrali

3.1 Serie di Fourier

La serie di Fourier di una funzione è la sua rappresentazione sotto forma di combinazione lineare di funzioni sinusoidali. Riveste una notevole importanza nello studio delle equazioni a derivate parziali, e trova applicazioni in molti campi dell'ingegneria, dall'elettronica all'informatica.

3.1.1 Base ortonormale

Si è già visto che una funzione può essere pensata come un "vettore" di uno spazio infinito dimensionale: per poter esprimere un vettore come combinazione lineare occorre una base. Omettiamo il procedimento per ricavare tale base, che mostreremo presto in un teorema; iniziamo con l'inquadrare lo spazio funzionale che avremo per riferimento, ossia lo spazio $L^2(0, 2\pi)$. Sappiamo già che L^2 è l'unico spazio L^p con la caratteristica di essere anche di Hilbert, come prodotto scalare definiamo:

$$(u, v)_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} uv$$

che induce la norma:

$$\|u\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |u|^2 \quad \forall u \in L^2(0, 2\pi)$$

Passiamo a mostrare la nostra base: ci occorrono dunque dei vettori ortogonali due a due che generino lo spazio L^2 : ogni funzione in tale spazio deve poter essere espressa come combinazione lineare di tali vettori, che come vedremo sono in numero infinito. Nel caso di spazi di Hilbert separabili una base con tali caratteristiche viene definita *hilbertiana*. Non mostriamo il procedimento per ricavarla ma la enunciamo direttamente:

Teorema 3.1: base ortonormale per L^2

Una base ortonormale di L^2 rispetto al prodotto scalare $(u, v)_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} uv$ è:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots \right\}$$

Dimostrazione

Dimostrata la buona definizione del prodotto scalare e della norma indotta vediamo facilmente che \mathcal{B} è una base con una infinità numerabile di vettori di L^2 . I suoi vettori sono effettivamente normali:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \right\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 dx = 1 \quad \|\sin nx\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin nx)^2 dx = 1$$

e ortogonali due a due:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin nx dx = 0 \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (n \neq m)$$

3.1.2 Coefficienti di Fourier

Abbiamo dunque una base per il nostro spazio di funzioni: ogni funzione nello spazio può essere espressa come combinazione lineare degli infiniti vettori di \mathcal{B} , e potremo quindi definirla in modo univoco attraverso i coefficienti della combinazione lineare. Nel caso della base appena mostrata, tali coefficienti sono detti "coefficienti di Fourier".

Teorema 3.2: serie di Fourier

Sia f una funzione in $L^2((0, 2\pi))$. Allora esistono due insiemi di coefficienti: $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Dove $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono detti *coefficienti di Fourier*. Rimandiamo a dopo il discorso sulla convergenza della serie, legata alla buona posizione della definizione. Ci concentriamo ora sull'aspetto più pratico, ovvero sulla *determinazione* di questi coefficienti una volta data la funzione f che vogliamo esprimere con questa serie.

I coefficienti a_n, b_n rappresentano le proiezioni di f rispettivamente sui coseni e sui seni, è pertanto possibile calcolarli considerando il prodotto scalare indotto dalla norma in L^2 :

$$a_n = (f, \cos nx)_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad b_n = (f, \sin nx)_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Il termine a_0 , corrispondendo a $n = 0$, risulta essere

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

La serie prodotta da questi coefficienti prende la funzione f , "ritaglia" la sua parte compresa fra 0 e 2π : essa coincide con il proprio sviluppo in serie *solamente* nell'intervallo $(0, 2\pi)$, mentre al di fuori di esso si ripete con periodicità.

Nella pratica abbiamo spesso a che fare con due casi: quello in cui il periodo va da 0 a T , e quello in cui il periodo è centrato in 0.

Primo caso: Se abbiamo una funzione periodica in $(0, T)$ allora useremo le seguenti relazioni :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T u(x) \, dx \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \, dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \, dx$$

Seconda alternativa: Se invece la nostra funzione è periodica in $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, cioè di periodo T centrato in zero, allora avremo:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x) \, dx \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \, dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \, dx$$

In entrambi i casi la serie di Fourier avrà la stessa forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

Osserviamo che nel caso di **funzioni dispari**, cioè $f(-x) = -f(x)$, valgono per la ricerca dei coefficienti le seguenti formule:

$$a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx$$

Mentre nel caso di **funzioni pari**, cioè $f(-x) = f(x)$, valgono per la ricerca dei coefficienti queste altre formule:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} \, dx \quad b_n = 0$$

Concludiamo questo paragrafo con una piccola osservazione: se f è pari e g dispari si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg = 0$$

ciò significa che $L^2(-\pi, \pi) = P \oplus D$, dove con $P \oplus D$ si intende la somma diretta tra i due sottospazi perpendicolari delle funzioni pari e dispari. Si ricordi che uno spazio V è somma diretta di due sottospazi W e Y se e solo se ogni elemento di V può essere scritto come somma di un unico elemento di W e di un unico di Y .

3.1.3 Uguaglianza di Parseval

Vale il seguente teorema, simile a una generalizzazione multidimensionale del teorema di Pitagora:

Teorema 3.3: uguaglianza di Bessel - Parseval

Sia $f \in L^2(0, 2\pi)$ e siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ i coefficienti di Fourier di f . Allora vale:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Si noti che i coefficienti sono quelli ricavati fra 0 e 2π , i primi che abbiamo definito sopra.

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di norma e esplicitiamo f con la serie di Fourier:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right] \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right]$$

Osserviamo che, moltiplicando termine a termine quelle due serie, i termini si annullano due a due per via dell'ortogonalità: otteniamo che:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0^2}{4} + a_1^2 (\sin x)^2 + b_1^2 (\cos x)^2 + a_2^2 (\sin 2x)^2 + b_2^2 (\cos 2x)^2 + \dots \right] dx$$

è evidente che integrando i termini otteniamo l'ultimo membro della tesi.

Si noti che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono successioni convergenti, appartengono quindi a ℓ^2 : con questo teorema si è creata una corrispondenza biunivoca tra $L^2(0, 2\pi)$ e ℓ^2 .

3.1.4 Convergenza

In che senso la serie di Fourier "coincide" con la funzione originale?

Definizione 3.4

Ottenuti i coefficienti di Fourier, definiamo le **somme parziali** della serie di Fourier come:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Vorremmo avere $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(x) = f(x)$ nel senso della norma in L^2 , quindi: $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|S_k(x) - f(x)\|_{L^2}^2 = 0$.

Teorema 3.5

Diremo che la serie ha **convergenza in media quadratica** in $(0, 2\pi)$ se

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |S_k(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

La serie possiede questo tipo di convergenza per ogni $f \in L^2(0, 2\pi)$.

Considerando la rappresentazione in serie di Fourier si può subito notare che $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$. Di conseguenza la convergenza delle serie $\sum_1^{\infty} |a_n|$ e $\sum_1^{\infty} |b_n|$ garantisce la convergenza assoluta e uniforme. Si ricorda che una serie $\sum_1^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge la serie dei moduli $\sum_1^{\infty} |a_n|$. Ciò garantisce la *convergenza totale*. Riassumendo si ha che

Teorema 3.6

Diremo che la serie ha **convergenza totale** in $(0, 2\pi)$ se

$$\sum_1^\infty |a_n| + |b_n| < \infty$$

Osserviamo che derivando la serie di Fourier si ottiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty -na_n \sin nx + nb_n \cos nx$$

e questa converge se $\sum_{n=1}^\infty n(|a_n| + |b_n|) < \infty$.

Dunque possiamo enunciare il seguente risultato:

Teorema 3.7

Una serie di Fourier derivata m volte converge totalmente se:

$$\sum_1^\infty n^m (|a_n| + |b_n|) < \infty$$

Ad ogni derivazione la serie diventa “meno infinitesima” a causa della moltiplicazione per n : questo significa che a una maggior velocità di decadimento dei coefficienti corrisponde una maggiore regolarità della serie.

Può interessare anche un tipo di convergenza più debole, quella puntuale, che la si può garantire con un opportuno criterio:

Teorema 3.8

Diremo che la serie ha **convergenza puntuale** in $(0, 2\pi)$ se vale il seguente criterio, detto **criterio di Dirichlet**:

$$a_n, b_n \downarrow 0$$

Ciò richiede che le successioni convergano monotonamente a 0; occorre quindi che siano positive.

Esempio

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ -1 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

$$f \in L^2(-\pi, \pi) \text{ infatti } \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f^2 = 2$$

$f \in D$ cioè è una funzione dispari: $a_n = 0 \forall n$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi} [\cos(nx)]_0^\pi = -\frac{2}{\pi n} [(-1)^n - 1] = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n].$$

Ho convergenza in L^p ma non uniforme: in L^∞ la distanza $\|S_k - f\|_\infty \geq 1$. Ciò si poteva capire dal fatto che f non è continua.

Tutto quanto detto finora sulla convergenza riguarda l'intervallo $(0, 2\pi)$, ma cosa succede sugli estremi di questo intervallo, cioè dove la serie si raccorda periodicamente?

Definizione 3.9

Un funzione f si dice **regolare a tratti** su $[0, 2\pi]$ se:

1. $f \in C^1[0, 2\pi]$ a meno di un numero finito di discontinuità x_i ;
2. $\forall x_i$ esistono finiti i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_i^+} f'(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f'(x)$$

Ciò significa che nei punti di discontinuità la serie converge puntualmente al punto medio

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

ove si è posto $f(x^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_i^\pm} f(x)$.

Quindi la serie, quando nei raccordi vi è un salto, assume il valore del punto medio del salto.

Si osservi inoltre che se f è regolare a tratti si ha che $f \in L^2$.

Riassumiamo la gerarchia delle convergenze:

Convergenza totale

$$\sum_1^\infty |a_n| + |b_n| < \infty$$

\implies

Convergenza uniforme

\implies

Convergenza in media quadratica

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |S_k(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

\implies

Convergenza puntuale

$$a_n, b_n \downarrow 0$$

(criterio di Dirichlet)

3.1.5 Forma esponenziale

Attraverso la formula di Eulero è possibile esprimere la serie di Fourier attraverso una serie di esponenziali complessi.

Consideriamo $f \in L^2((0, 2\pi))$: possiamo ricavare i coefficienti di Fourier $\{a_n\}, \{b_n\}$. Definisco per $n \geq 0$ partendo dalle serie dei coefficienti di Fourier altre due serie di coefficienti:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Ovvero

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) [\cos nx - i \sin nx] dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) [\cos nx + i \sin nx] dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx$$

Ora si osservi che queste serie di coefficienti possono essere “unificate” in un’unica serie di coefficienti indicizzata non più sui numeri naturali ma sugli interi:

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Definiamo la **serie di Fourier esponenziale**:

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imx}$$

Infine deduciamo l’uguaglianza di Parseval adattata alla forma esponenziale:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2$$

3.2 Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier è un collegamento tra spazi funzionali, rappresenta un metodo utile per risolvere le equazioni a derivate parziali.

3.2.1 Definizione

La trasformata di Fourier di una funzione si ottiene tramite un opportuno integrale complesso.

Definizione 3.10

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definiamo **trasformata di Fourier** di u la funzione $\hat{u} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(u(x), \xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx$$

L'integrale converge quando le ipotesi sono rispettate:

$$|e^{-i\xi \cdot x}| = 1 \quad |e^{-i\xi \cdot x} u(x)| = |u(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

3.2.2 Continuità della trasformata

La trasformata prende una funzione in L^1 : la funzione trasformata a che spazio funzionale apparterrà?

Definizione 3.11

Si definisca lo spazio \mathcal{C}_0^0 come segue:

$$\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) : |u(x)| \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty\}$$

Osserviamo che $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$; è invece falso che $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.12: di Riemann - Lebesgue

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Allora

$$\mathcal{F}(u(x), \xi) \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\|\mathcal{F}(u(x), \xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Dimostrazione

Continuità della trasformata

Consideriamo la successione convergente $\xi_n \rightarrow \xi \in \mathbb{R}^n$. Osserviamo che $e^{-i\xi_n \cdot x} u(x)$ converge a $e^{-i\xi \cdot x} u(x)$ quasi ovunque grazie alla continuità dell'esponenziale. Inoltre $|e^{-i\xi \cdot x} u(x)| = |u(x)|$ da cui per l'ipotesi possiamo affermare che $e^{-i\xi \cdot x} u(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$: ciò mi permette di applicare il teorema della convergenza dominata (2.15):

$$\hat{u}(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi_n \cdot x} u(x) dx \xrightarrow{cd} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx = \hat{u}(\xi)$$

E questo dimostra la continuità.

Disuguaglianza delle norme

Per provare la disuguaglianza basta osservare che:

$$\hat{u}(\xi) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx = \|u\|_{L^1} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Se \hat{u} è minore di $\|u\|_{L^1}$ per ogni ξ allora lo sarà anche nel suo estremo superiore essenziale, che è la norma in L^∞ .

Omettiamo la dimostrazione dell'**annullamento all'infinito**.

Dunque capiamo cosa si deve intendere quando diciamo che la trasformata collega due spazi funzionali: la trasformata di Fourier trasforma una funzione Lebesgue-integrabile in una continua.

3.2.3 Proprietà

Enunciamo i seguenti teoremi che illustrano alcune utili caratteristiche:

Teorema 3.13: proprietà di calcolo

Siano $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, x e $y \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile. Valgono allora le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{F}(u(x-y), \xi) = e^{-i\xi \cdot y} \mathcal{F}(u(x), \xi)$
2. $\mathcal{F}(e^{iy \cdot x} u(x), \xi) = \mathcal{F}(u(x), \xi - y)$
La traslazione si trasforma in moltiplicazione per uno scalare immaginario e viceversa.
3. $\mathcal{F}(u(A^{-1}x), \xi) = |\det A| \mathcal{F}(u(x), A^T \xi)$
Valida e molto utile anche quando $n = 1$.
4. $\mathcal{F}(\overline{u(x)}, \xi) = \overline{\mathcal{F}(u(x), -\xi)}$

Dimostrazione

Dimostriamo tutte le proprietà illustrate:

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(x-y), \xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x-y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot z + y} u(z) dz && \text{(cambio di variabile: } z = x - y) \\ &= e^{-i\xi \cdot y} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot z} u(z) dz \\ &= e^{-i\xi \cdot y} \mathcal{F}(u(x), \xi) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{iy \cdot x} u(x), \xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} e^{iy \cdot x} u(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi - y) \cdot x} u(x) dx \\ &= \mathcal{F}(u(x), \xi - y) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(A^{-1}x), \xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(A^{-1}x) dx \\ &= |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot Ay} u(y) dy && (y = A^{-1}x \quad x = Ay \quad dx = |\det A| dy) \\ &= |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iA^T \xi \cdot Ax} u(x) dx && (x = y) \\ &= |\det A| \mathcal{F}(u(x), A^T \xi) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\overline{u(x)}, \xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \overline{u(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{i\xi \cdot x} u(x)} dx \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} u(x) dx} \\ &= \overline{\mathcal{F}(u(x), -\xi)} \end{aligned}$$

Teorema 3.14: proprietà di simmetria

Siano $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Valgono allora le seguenti proprietà:

1. Se $u(x) = u(y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x| = |y|$ allora $\hat{u}(x) = \hat{u}(y)$;
Ossia, se u ha *simmetria radiale* ($u(x) = u(|x|)$), allora \hat{u} ha *simmetria radiale*.
2. Se u è *pari* allora \hat{u} è *pari*.
3. Se u è *dispari* allora \hat{u} è *dispari*.
4. Se u è *reale e pari* allora \hat{u} è *reale e pari*.
5. Se u è *reale e dispari* allora $i\hat{u}$ è *reale e dispari*.

Trattiamo ora il rapporto fra la trasformata di Fourier e la derivazione: i due teoremi che seguono, in un certo senso l'uno inverso dell'altro, si occupano di stabilire cosa accade alla derivata della funzione trasformata: essi mettono in risalto la relazione fra "buona regolarità" e "buon decadimento", prima e dopo la trasformata.

Teorema 3.15

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1$. Consideriamo la funzione $v(x) = (x \cdot y)u(x)$.
Se $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\exists \partial_y \hat{u} \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial_y \hat{u}(\xi) = -i\hat{v}(\xi)$$

Se $|x|u(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\hat{u} \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione

Dimostriamo la prima implicazione: consideriamo il rapporto incrementale e svolgiamo opportunamente il limite, avvalendoci del teorema di Lebesgue:

$$\frac{\hat{u}(\xi + ty) - \hat{u}(\xi)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-i(\xi+ty) \cdot x} - e^{-i\xi \cdot x}}{t} u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-ity \cdot x} - 1}{t} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx$$

Osserviamo che:

$$\frac{e^{-ity \cdot x} - 1}{t} \longrightarrow -iy \cdot x$$

Allora, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-ity \cdot x} - 1}{t} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx \longrightarrow -i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} (y \cdot x) u(x) dx = -i\hat{v}(\xi)$$

Resta da mostrare la continuità: osserviamo che:

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{i\lambda} - 1}{t} \right| \leq 1 &\iff |(\cos(\lambda) - 1) + i \sin(\lambda)| \leq |\lambda| \\ &\iff \cos(\lambda)^2 - 2 \cos(\lambda) + 1 + \sin(\lambda)^2 \leq \lambda^2 \\ &\iff 2(1 - \cos(\lambda)) \leq \lambda^2 \end{aligned}$$

e ciò è sempre verificato.

Quindi possiamo dire che:

$$\left| \frac{e^{-ity \cdot x} - 1}{t} e^{-i\xi \cdot x} u(x) \right| \leq |y \cdot x| |u(x)| = |v(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Teorema 3.16

Sia $u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1$.

Se $\partial_y u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u(x) = o(|x|^{1-n})$ per $x \rightarrow \infty$, allora

$$\mathcal{F}(\partial_y u(x), \xi) = i(\xi \cdot y) \hat{u}(\xi)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_y u(x), \xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \partial_y u(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R} e^{-i\xi \cdot x} \partial_y u(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[- \int_{B_R} \partial_y (e^{-i\xi \cdot x}) u(x) dx + \int_{\partial B_R} e^{-i\xi \cdot x} u(x) (y \cdot \nu) S_x \right] \\ &\quad \text{(formula di Gauss Green)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{B_R} i(\xi - y) e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx + o(1) \right] \\ &\quad \text{(dal volume delle ipersfere: } |e^{-i\xi \cdot x}| \leq |u(x)| = o(R^{n-1})) \\ &= i(\xi \cdot y) \hat{u}(\xi) \end{aligned}$$

Possiamo riassumere questi due teoremi in due formule pronte all'uso per gli esercizi (caso $u(x) \in \mathbb{R}$):

$$\mathcal{F}(x \cdot u(x)) = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}(u(x), \xi) \quad \mathcal{F}\left(\frac{d}{dx} u(x)\right) = i\xi \mathcal{F}(u(x), \xi)$$

3.2.4 Convoluzione

Trattiamo brevemente l'operazione di convoluzione.

Definizione 3.17

Siano $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si definisce **convoluzione** tra u e v la funzione:

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) dy \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^n$$

La definizione vale quasi ovunque in quanto non è garantita l'integrabilità del prodotto fra due funzioni in L^1 . In particolare, il problema emerge se le funzioni hanno singolarità che vanno a coincidere nel momento in cui si moltiplicano: ciò può dare luogo a una funzione non integrabile. Questo discorso può però riguardare al più un numero finito di punti, dunque la definizione è sempre quasi ovunque valida.

Teorema 3.18: disuguaglianza della convoluzione

Siano $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|u * v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}$$

Dimostrazione

Poniamo $H(x, y) = u(x - y)v(y)$, dove $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$.

$$\begin{aligned} \|u * v\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |(u * v)(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - y)v(y)| dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - y)||v(y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - y)| dx dy && \text{(teorema di Fubini)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)| dy \int_{\mathbb{R}^n} |u(z)| dz && \text{(cambio di variabile)} \\ &= \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1} \end{aligned}$$

La nostra trasformata ha un'importante proprietà: quella di trasformare la convoluzione in un prodotto. Vale infatti questo teorema:

Teorema 3.19: trasformata di una convoluzione

Siano $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\mathcal{F}((u * v)(x), \xi) = \mathcal{F}(u(x), \xi) \cdot \mathcal{F}(v(x), \xi)$$

Il teorema si dimostra facilmente con l'uso del teorema di Fubini.

3.2.5 Antitrasformata

Occupiamoci ora di tornare alla funzione originale data la trasformata:

Teorema 3.20: di inversione

Sia $u(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mathcal{F}(u(x), \xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Allora $u(x) \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ e vale la seguente *formula di inversione*:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \mathcal{F}(u(x), \xi) d\xi$$

In primo luogo notiamo che il teorema evidenzia la biunivocità dello “scambio di proprietà” tra $u(x)$ e $\mathcal{F}(u(x), \xi)$: l'antitrasformata è molto simile alla trasformata, dunque ha le stesse proprietà. Vediamo già da questo teorema che il buon *decadimento* all'infinito della trasformata di una funzione, ovvero l'appartenenza a L^1 , si trasforma in buona *regolarità* della funzione stessa, ovvero l'appartenenza a C_0^0 .

La stessa cosa succedeva nel senso inverso: $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Si noti, tuttavia, che il viceversa è valido solo per opportune funzioni u , ovvero quelle la cui trasformata è integrabile.

Grazie a queste osservazioni e alla formula di inversione si può iniziare a notare come la trasformata di Fourier sia una trasformazione in un certo senso *simmetrica*: la trasformata è molto simile all'antitrasformata per aspetto e proprietà.

La dimostrazione del teorema fa uso della convoluzione e si effettua verificando con i calcoli la formula di sopra.

3.2.6 Teorema di Plancherel e altre proprietà

Ci chiediamo se, data $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il seguente integrale sia ben definito:

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx$$

La domanda non è banale in quanto siamo su un dominio a misura infinita (\mathbb{R}^n) e all'infinito vale la gerarchia opposta degli spazi rispetto al normale caso del dominio finito: non necessariamente una funzione in L^2 decade abbastanza velocemente da essere integrabile (ovvero in L^1) anche se non elevata al quadrato.

Sfruttiamo ora il fatto che \mathcal{D} sia un sottoinsieme denso in L^2 e che $\mathcal{D} \subset L^1$: una volta definita la trasformata su \mathcal{D} , potremo definire, "per continuità", la trasformata in L^2 come il limite di un'opportuna successione approssimante che converge in \mathcal{D} .

Teorema 3.21: di Plancherel

Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Allora $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|\hat{u}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^n \|u\|_{L^2}^2$$

In altre parole, L^2 è il "punto di equilibrio" dello scambio di proprietà tra dominio e codominio: la trasformata manda L^2 in sé stesso. Questo risultato non è sorprendente, in quanto già in altre situazioni L^2 si era dimostrato uno "spazio simmetrico".

Dimostrazione

Sia $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Allora:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(x)} u(x) dx && \text{(proprietà dei complessi)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i\xi \cdot x} \hat{u}(\xi) d\xi \right) dx && \text{(formula di inversione)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i\xi \cdot x} \overline{u(x)} dx \right) d\xi && \text{(per il teorema di Fubini)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx \right)} d\xi && \text{(proprietà dei complessi)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{u}(\xi)} d\xi && \text{(per definizione)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{u}\|_{L^2}^2 && \text{(similmente a prima)} \end{aligned}$$

La tesi è dunque dimostrata per $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Sia ora invece $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e si prenda una successione di funzioni $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tali che $\varphi_k \rightarrow u$ in L^2 . Si definisce ora la trasformata di u come il limite delle approssimanti:

$$\hat{u} := \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{\varphi}_k$$

Per definizione di convergenza in L^2 si ha dunque che:

$$\|\varphi_k\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{\varphi}_k\|_{L^2}^2 \quad \forall k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}\|_{L^2}^2$$

Sempre in merito alle relazioni fra spazi funzionali operati dalla trasformata di Fourier, si può facilmente mostrare che:

Teorema 3.22

Siano p e q coniugati.

Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora $\hat{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

Cosa succede se trasformiamo più volte la stessa funzione? Noteremmo che vi è una certa *ciclicità*:

Teorema 3.23: ciclicità della trasformata

Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, valgono le seguenti due proprietà:

$$\mathcal{F}^2(u(x), \xi) = (2\pi)^n u(-\xi) \quad \text{e} \quad (2\pi)^{2n} u(\xi) = \mathcal{F}^4(u(x), \xi)$$

\mathcal{F}^n è la notazione per indicare la trasformata di Fourier applicata ricorsivamente n volte.

Si noti che per le applicazioni ricorsive della trasformata è essenziale affinché ogni applicazione abbia significato: L^2 infatti è l'unico spazio L^p ad essere mappato in sé stesso.

Dalla seconda proprietà si osserva che la trasformata di Fourier "cicla" ogni 4 applicazioni, ciascuno dei quali aggiunge un fattore moltiplicativo $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$; in un certo senso, essa sarebbe idempotente (cioè l'identità) se non fosse per il fattore $(2\pi)^{2n}$.

La prima proprietà evidenzia come dopo 2 sole applicazioni si sia completato metà del suddetto "ciclo", in una situazione simmetrica rispetto alla partenza, nel senso che è stata aggiunta la potenza n -esima di 2π (su un totale di $2n$) e l'argomento è opposto. Queste considerazioni sono ulteriore evidenza della *simmetria* intrinseca della trasformata.

Mostriamo una proprietà concettualmente analoga alla formula di integrazione per parti per il calcolo degli integrali:

Teorema 3.24: di trasformazione per parti

Siano $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \widehat{v}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(x) v(x) \, dx$$

Dimostrazione

Utilizzeremo il teorema di Fubini e le proprietà dell'antitrasformata:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \widehat{v}(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(x) \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} \, d\xi \right) \, dx && \text{(antitrasformata)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) (2\pi)^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \widehat{v}(x) \, dx \right) \, d\xi && \text{(per il teorema di Fubini)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) v(\xi) \, d\xi && \text{(antitrasformata)} \end{aligned}$$

Tutti i passaggi tra integrali sono leciti perché le funzioni sono in L^1 .

3.2.7 Trasformata in \mathcal{S}'

Si può mostrare che la trasformata di una funzione in \mathcal{S} (ovvero a decrescita rapida) è ancora in \mathcal{S} . Intuitivamente, questo funziona perché la trasformata scambia decadimento con regolarità e viceversa, e le funzioni in \mathcal{S} hanno entrambe le qualità, essendo C^∞ e decadenti più velocemente di ogni potenza. Si può dunque definire la trasformata di un oggetto in \mathcal{S}' :

Definizione 3.25

Sia $\Lambda \in \mathcal{S}'$ una distribuzione temperata.

Si definisce la **trasformata di Fourier della distribuzione temperata** Λ la seguente distribuzione temperata:

$$\langle \widehat{\Lambda}, \varphi \rangle := \langle \Lambda, \widehat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

La dualità sopra riportata è sempre ben definita in quanto ogni funzione a decrescita rapida ammette trasformata di Fourier (in senso proprio). Si noti inoltre che la proposizione 3.24 è il caso particolare nel quale entrambe le funzioni nella dualità sono integrabili.

Verifichiamo ora che la trasformata così definita sia effettivamente continua, come richiesto a una distribuzione. Si prenda una successione $\varphi_k \in \mathcal{S}$ tale che $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in \mathcal{S} . Presa una generica distribuzione temperata $\widehat{\Lambda} \in \mathcal{S}'$, si

ha che:

$$\langle \widehat{\Lambda}, \varphi_k - \varphi \rangle := \langle \Lambda, \varphi_k - \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{S}} \langle \Lambda, 0 \rangle = 0 \quad (\text{continuità})$$

Esempio

Calcoliamo la trasformata di Fourier della delta di Dirac δ_y , che sappiamo essere inclusa in \mathcal{S}' . Presa una funzione $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \widehat{\delta}_y, \varphi \rangle := \langle \delta_y, \widehat{\varphi} \rangle = (\widehat{\varphi})(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot x} \varphi(x) dx = \langle e^{-iy \cdot x}, \varphi \rangle$$

In altre parole $\mathcal{F}(\delta_y, x) = e^{-iy \cdot x}$, e in particolare $\widehat{\delta}_0 = 1$. Si prosegua calcolando la trasformata della trasformata della delta. Anzitutto si ricordi che, per la formula dell'antitrasformata:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \implies \varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

Pertanto, presa $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \widehat{1}, \varphi \rangle := \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^n \varphi(0) = \langle (2\pi)^n \delta_0, \varphi \rangle$$

Riassumendo, $\widehat{1} = (2\pi)^n \delta_0$. Le trasformate di altre costanti discendono immediatamente per linearità.

3.2.8 Risoluzione di equazioni differenziali

La trasformata di Fourier ha molte proprietà che la rendono un utile strumento nella risoluzione delle equazioni differenziali, in particolare la linearità e la trasformazione dell'operatore di derivazione in un prodotto. In generale, data un'equazione differenziale (EDO), il procedimento per risolverla mediante la trasformata è:

$$\text{EDO} \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{EQ algebrica} \xrightarrow{\text{conti}} \text{soluzione EQ} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \text{soluzione EDO}$$

Esplicitiamo il procedimento: cerchiamo la soluzione $y = y(x)$ di

$$a_k y^{(k)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Applicando la trasformata di Fourier a entrambi i membri si ottiene:

$$a_n (i\xi)^n \widehat{y}(\xi) + \dots + a_1 i\xi \widehat{y}(\xi) + a_0 \widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

Ora si può risolvere in \widehat{y} e applicare l'antitrasformata per ottenere la soluzione:

$$\widehat{y}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\sum_{n=0}^k a_n (i\xi)^n}$$

Da cui

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{f}(\xi)}{\sum_{n=0}^k a_n (i\xi)^n}, x \right)$$

Naturalmente il metodo delle trasformate funziona solo se tutte le proprietà sono applicabili, tutte le funzioni sufficientemente regolari e integrabili; ovvero, è necessario anche che la soluzione ammetta trasformata, anche se questo si può stabilire solo a posteriori.

3.2.9 Relazione tra serie e trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier ha una forte relazione con la serie omonima. Abbiamo definito la serie esponenziale come:

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imx} \quad \text{con} \quad c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Si può immediatamente notare che per una funzione f opportuna vale la relazione:

$$\mathcal{F}(f(x), \xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

e dunque in questo caso:

$$c_m = \frac{1}{T} \mathcal{F}(f(x), \frac{2\pi m}{T})$$

La funzione f "opportuna" è quella non nulla solo nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Quindi operativamente posso trovare c_m se integro fra gli estremi dell'intervallo di periodicità. La relazione fra serie e trasformata si manifesta quando ho una funzione non nulla solo in un'intervallo e la serie mi restituirà una funzione periodica di quell'intervallo uguale alla funzione trasformanda in quell'intervallo. Questo il legame fra i coefficienti di Fourier della serie esponenziale e la trasformata di Fourier.

3.3 Trasformata di Laplace

In questa sezione trattiamo di un'altra trasformata integrale, la trasformata di Laplace. Come la trasformata di Fourier è un'applicazione fra spazi funzionali realizzata grazie a un opportuno integrale.

3.3.1 Definizione

Definizione 3.26

Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che $\text{supp } u \subset [0, +\infty)$ nel senso delle distribuzioni (si può ovviare moltiplicando per $H(x)$ funzione di Heaviside);

Se esistono dei valori $\lambda \in \mathbb{R}$ tali per cui $e^{-\lambda t}u(t) \in L^1(\mathbb{R})$ i quali hanno come estremo inferiore $\lambda_a(u)$ detta *ascissa di convergenza*, diremo che u è una funzione **Laplace trasformabile** e definiamo $\forall s \in \mathbb{C}$ tali per cui $\text{Re } s > \lambda_a$ la **trasformata di Laplace** come la funzione:

$$\mathcal{L}(u(t), s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}u(t)dt \quad s \in \mathbb{C}$$

Quali funzioni non sono L-trasformabili?

Teorema 3.27

Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } u \subset [0, -\infty)$, $m > 0$.

Se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

$$|u(t)| \leq me^{\lambda t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

allora u è Laplace trasformabile con ascissa di convergenza $\lambda_a(u) \leq \lambda$.

E questo si evince dalla definizione. Facciamo qualche esempio.

Esempio

Un esempio di funzione *non* Laplace trasformabile è $u = e^{t^2}$, in tal caso $\lambda_a(u) = +\infty$ e dunque $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$.

Un esempio di funzione *sempre* Laplace trasformabile è $u = e^{-t^2}$, in tal caso $\lambda_a(u) = -\infty$ e dunque posso trasformarla $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Considerando $u = t$ avremo $\lambda_a(u) = 0$, dunque è Laplace trasformabile.

3.3.2 Proprietà

Studiamo alcune proprietà:

Teorema 3.28: proprietà di calcolo

Sia u una funzione Laplace trasformabile. Valgono allora le seguenti proprietà:

1. $\forall t_0 > 0$ la funzione $t \mapsto u(t - t_0)$ è trasformabile e:

$$\mathcal{L}(u(t - t_0), s) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}(u(t), s) \quad \text{per } \text{Re } s > \lambda_a(u)$$

2. $\forall s_0 \in \mathbb{C}$ la funzione $t \mapsto e^{s_0 t}u(t)$ è trasformabile e:

$$\mathcal{L}(e^{s_0 t}u(t), s) = \mathcal{L}(u(t), s - s_0) \quad \text{per } \text{Re } s > \text{Re } s_0 + \lambda_a(u)$$

3. $\forall c > 0$ la funzione $t \mapsto u(ct)$ è trasformabile e:

$$\mathcal{L}(u(ct), s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}(u(t), \frac{s}{c}) \quad \text{per } \text{Re } s > c\lambda_a(u)$$

Dimostrazione

Dimostriamo tutte le proprietà illustrate:

1.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(u(t-t_0), s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t-t_0) dt \\
 &= \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} u(t-t_0) dt && \text{(avendo traslato il supporto di } u) \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+t_0)} u(\tau) d\tau && \text{(cambio di variabile: } \tau = t - t_0) \\
 &= e^{-t_0 s} \mathcal{L}(u(t), s) \quad \forall \operatorname{Re} s > \lambda_a(u)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(e^{s_0 t} u(t), s) &= \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} u(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} u(t) dt \\
 &= \mathcal{L}(u(t), s - s_0) \quad \forall \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0 + \lambda_a(u)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(u(ct), s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} u(ct) dt \\
 &= \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{\tau}{c}} u(\tau) d\tau && \text{(cambio di variabile)} \\
 &= \frac{1}{c} \mathcal{L}\left(u(t), \frac{s}{c}\right) \quad \operatorname{Re} s > c\lambda_a(u)
 \end{aligned}$$

Riportiamo alcuni esempi di trasformate:

Esempio

Trasformiamo la funzione $u = 1$. Per adattare il supporto usiamo la funzione Heaviside.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(H(t), s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt && \lambda_a = 0 \quad \forall \operatorname{Re} s > 0 \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k e^{-st} dt \\
 &= - \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^k \\
 &= - \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-s_1 t - is_2 t}}{s} \right]_0^k \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\frac{-e^{-s_1 k - is_2 k}}{s} + \frac{1}{s} \right]_0^k \\
 &= \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

Esempio

Trasformiamo la funzione $u(t) = \cos(\omega t)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(H(t)\cos(\omega t), s) &= \mathcal{L}(H(t)\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{i\omega t}, s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-i\omega t}, s) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + i\omega} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Da ora la funzione di Heaviside verrà sottointesa.

Esempio

Calcoliamo la trasformata della distribuzione δ_0 delta di Dirac, iniziamo col definire la funzione:

$$u_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & 0 < t < \epsilon \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Con un opportuno passaggio al limite possiamo ottenere la delta a partire da questa funzione. Trasformiamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\delta_0, s) &= \mathcal{L}(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(t), s) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \frac{e^{-st}}{\epsilon} dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-s\epsilon} - 1}{-s\epsilon} \\ &= 1\end{aligned}$$

In generale abbiamo che:

$$\mathcal{L}(\delta_{t_0}, s) = e^{-t_0 s} \quad \forall t_0 > 0$$

Riportiamo alcune trasformate di Laplace notevoli:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n, s) &= \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} & \mathcal{L}(t^\alpha, s) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}} \quad \text{con } \alpha > 0 \\ \mathcal{L}(\sin t, s) &= \frac{1}{1 + s^2} & \mathcal{L}(\sin \omega t, s) &= \frac{1}{\omega^2 + s^2} \\ \mathcal{L}(\cos t, s) &= \frac{s}{1 + s^2} & \mathcal{L}(\cos \omega t, s) &= \frac{s}{\omega^2 + s^2}\end{aligned}$$

3.3.3 Derivazione

Mostriamo un risultato legato alla derivazione:

Teorema 3.29

Sia u una funzione Laplace trasformabile. Allora:

- $\mathcal{L}(u(t), s) \in H(\mathbb{R}e s > \lambda_a(u))$ (è olomorfa sul semipiano complesso)
- $t u(t)$ è trasformabile e vale la formula

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(u(t), s) = -\mathcal{L}(tu(t), s) \quad \forall \mathbb{R}e s > \lambda_a(u)$$

Dimostrazione

Dimostriamo solo la formula al secondo punto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{L}(u(t), s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(u(t), s+h) - \mathcal{L}(u(t), s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-st}(e^{-st} - 1)}{h} u(t) dt \\ &= - \int_0^\infty e^{-st} t u(t) dt \\ &= -\mathcal{L}(tu(t), s) \end{aligned}$$

Esempio

Usiamo il teorema per calcolare la trasformata di $u(t) = t H(t)$:

$$\mathcal{L}(tH(t), s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(H(t), s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Esercizio

Si trasformi un generico polinomio: $\sum_{k=0}^n a_k t^k$.

Soluzione $\mathcal{L}(H(t) \sum_{k=0}^n a_k t^k, s) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k k!}{s^{k+1}} \quad \forall \operatorname{Re} s > 0$

Enunciamo un importante risultato:

Teorema 3.30

Sia $u(t) \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ Laplace trasformabile. Sia inoltre $H(t)u'(t)$ anch'essa Laplace trasformabile. Allora:

1. Posto $u(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)$ si ha:

$$\mathcal{L}(u'(t), s) = s\mathcal{L}(u(t), s) - u(0^+) \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > \max\{\lambda_a(u), \lambda_a(u')\}$$

2. Vale la formula del valore iniziale:

$$u(0^+) = \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}(u(t), s)$$

3. Vale la formula del valore finale, purché $H(t)u'(t) \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}(u(t), s)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u'(t), s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} u'(t) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k e^{-st} u'(t) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ s \int_0^k e^{-st} u(t) dt + [e^{-st} u(t)]_0^k \right\} \quad (\text{vedi sotto}) \\ &= s\mathcal{L}(u(t), s) - u(0^+) \end{aligned}$$

Nel quarto passaggio abbiamo $[e^{-st} u(t)]_0^k = e^{-sk} u(k) - u(0^+)$. Poichè $u \in L^1$ allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-sk} u(k) = 0$.

Quindi si ha anche che $\mathcal{L}(u'(t), s) \rightarrow 0$ quando $\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}(u(t), s) &= u(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}(u'(t), s) \\
&= u(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-st} u'(t) dt \\
&= u(0^+) + \int_0^{+\infty} u'(t) dt \\
&= u(+\infty)
\end{aligned}$$

Corollario 3.31

Siano $u, u', u'', \dots, u^{(k)}$ funzioni Laplace trasformabili.
Allora:

$$\mathcal{L}(u^{(k)}(t), s) = s^k \mathcal{L}(u(t), s) - \sum_{j=1}^k s^{k-j} u^{(j-1)}(0^+) \quad \forall \operatorname{Re} s > \max\{\lambda_a(u), \lambda_a(u'), \lambda_a(u''), \dots, \lambda_a(u^{(k)})\}$$

3.3.4 Convoluzione

Come quella di Fourier, anche la trasformata di Laplace ha un legame particolare con l'operazione di convoluzione.

Teorema 3.32: convoluzione della trasformata di Laplace

Siano u e v due funzioni Laplace trasformabili.
Allora la loro convoluzione $u * v$ è trasformabile e vale la formula:

$$\mathcal{L}((u * v)(t), s) = \mathcal{L}(u(t), s) \cdot \mathcal{L}(v(t), s)$$

Dimostrazione

In primo luogo dimostriamo che la convoluzione è Laplace-trasformabile:

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-y)v(y)dy = \int_0^{+\infty} u(t-y)v(y)dy$$

In quanto $\operatorname{supp}(v) \subset [0, +\infty]$.

Osserviamo che quando $t < 0$ abbiamo $(u * v)(t) = 0$. Inoltre, poichè anche $\operatorname{supp}(u) \subset [0, +\infty]$ e poichè se $t < 0$ allora $t - y < 0$, quando $t > 0$ u è non nulla fino a t , e dunque:

$$(u * v)(t) = \int_0^t u(t-y)v(y)dy$$

Possiamo quindi passare a dimostrare la formula:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}((u * v)(t), s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} (u * v)(t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t u(t-y)v(y) dy dt && \text{(definizione di convoluzione)} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-y)v(y) dy dt && \text{(vedi prima parte della dimostrazione)} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} u(t-y) dy dt && \text{(teorema di Fubini)} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s(\tau+y)} u(\tau) d\tau dy && \text{(cambio di variabile: } \tau = t - y) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sy} v(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} u(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-sy} v(y) dy \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} u(\tau) d\tau \\
 &= \mathcal{L}(u)(t, s) \cdot \mathcal{L}(v)(t, s)
 \end{aligned}$$

3.3.5 Antitrasformata

Come possiamo antitrasformare una funzione? Quando possiamo farlo? Noteremo un importante legame fra la trasformata di Laplace e quella di Fourier.

Osserviamo che presa una funzione u Laplace trasformabile tale per cui U funzione complessa sia la sua trasformata, abbiamo che:

$$U(x + iy) = U(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-iyt} e^{-xt} u(t) dt = \mathcal{F}(e^{-xt} u(t), y) \quad x > \lambda_a(u), \text{ supp } U \subset [0, +\infty)$$

Abbiamo trovato un legame con la trasformata di Fourier! Già sappiamo antitrasformare con questa trasformata: possiamo sfruttare questa conoscenza per ricavare l'antitrasformata di Laplace. Iniziamo con antitrasformare secondo Fourier:

$$e^{-xt} u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ist} U(x + iy) dy$$

Da cui:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{(x+iy)t} U(x + iy) dy$$

Attuiamo un cambio di variabile ponendo $s = x + iy$ e $\Gamma_x = \{s = x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} e^{st} U(s) ds$$

Ricordiamo che $U(s) \in H(\mathbb{R}e s > \lambda_a(u))$, inoltre affinché $U(s)$ sia in L^1 è sufficiente che soddisfi la seguente disuguaglianza:

$$|U(s)| \leq \frac{c}{1 + |s|^\alpha} \quad c > 0, \alpha > 1$$

Ricapitoliamo con questo teorema:

Teorema 3.33: antitrasformata di Laplace

Sia $U(s)$ con $s \in \mathbb{C}$ una funzione complessa tale che $U(s) \in H(\mathbb{R}e s > \lambda_a(u))$ (olomorfa in un semipiano). Supponiamo che esistano $c > 0$ e $\alpha > 1$ tali per cui:

$$|U(s)| \leq \frac{c}{1 + |s|^\alpha}$$

Allora esiste ed è unica la funzione $u(t)$ tale che $U(s) = \mathcal{L}(u(t), s)$, e posto $\Gamma_x = \{s = x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ è

data dalla formula:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} e^{st} U(s) ds$$

Prontuario salvavita dello studente

Topologia e insiemistica

Un punto x si dice **interno** ad A se $\exists U(x) : U(x) \subset A$.

Un punto x si dice **esterno** ad A se $\exists U(x) : U(x) \cap A = \emptyset$.

Un punto x appartiene alla **frontiera** di A se non è esterno né interno, e scriveremo: $x \in \partial A$.

Un insieme A si dice **aperto** se contiene tutti i suoi punti interni, scelto cioè un qualunque punto $x \in A$ allora esiste un intorno U_x tale che $U \subset A$.

Un insieme A si dice **connesso** se, presi due suoi punti, questi si possono congiungere tramite una linea di punti tutti contenuti in A , oppure, in alternativa, se non può essere rappresentato come unione di due insiemi non vuoti e separati.

Un insieme A si dice **semplicemente connesso** se ogni curva chiusa al suo interno può essere deformata con continuità in un punto (intuitivamente “non ha buchi”). Attenzione però al caso tridimensionale: se all’interno vi sono delle “bolle” l’insieme è semplicemente connesso, non lo è se vi sono delle cavità che attraversano l’insieme da parte a parte, come in un toro.

Concetti vari di analisi

Formule di Eulero Relazione tra funzioni goniometriche e funzione esponenziale:

$$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x = \cosh(i\alpha x) + \sinh(i\alpha x)$$

$$\cos(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} = \cosh(i\alpha x) \quad \sin(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i} = -i \sinh(i\alpha x)$$

Limiti notevoli da cui si possono ricavare agevolmente gli asintotici.

Per $x \rightarrow 0$:

- $\lim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
- $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim \frac{\arctan x}{x} = 1$
- $\lim \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln(\alpha)$
- $\lim \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
- $\sin x \sim x$
- (vedi successivo)
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $\tan x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $\alpha^x - 1 \sim x \ln(\alpha)$
- $\ln(1+x) \sim x$

Teorema di Schwarz Se $f_{x_j x_k}$ e $f_{x_k x_j}$ esistono in un intorno di x e sono continue in x allora $f_{x_j x_k}(x) = f_{x_k x_j}(x)$. In altre parole, la matrice hessiana associata a f è simmetrica.

Forme differenziali Sia $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3$ un campo vettoriale. Si associa ad esso la *forma differenziale* $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

ω è esatta se $\exists f : \omega = df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$.
 ω è chiusa se $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

ω forma differenziale esatta $\Rightarrow \omega$ forma differenziale chiusa.

ω forma differenziale chiusa definita in un aperto semplicemente connesso $\Rightarrow \omega$ forma differenziale esatta.

Convulsione Siano u e v due funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$. La convulsione è definita come:

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy$$

Funzione Gamma e Fattoriale La funzione Gamma di Eulero è definita come:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

Vi è uno stretto legame fra la funzione Gamma e il fattoriale:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo legame si può dimostrare facilmente, infatti integrato per parti si ottiene che $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ e segue $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ da cui...

Esiste inoltre un'approssimazione del fattoriale noto come *approssimazione di Stirling*:

$$n! \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Coefficiente e teorema binomiale Il coefficiente binomiale è definito come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Il teorema binomiale (*formula di Newton*) consente di individuare lo sviluppo della potenza n -esima di un binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Serie di potenze

I teoremi e le regole valide nel campo reale si mantengono tali anche in campo complesso.

Convergenza delle serie di potenze

Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ la serie sviluppo di una funzione f centrata in z_0 . Il luogo degli z in cui essa converge è influenzato da una quantità R detta *raggio di convergenza*:

- la serie *converge* $\forall z$ nel disco di convergenza $|z - z_0| < R$;
- la serie *diverge* $\forall z$ nell'area esterna al disco di convergenza $|z - z_0| > R$;
- il carattere della serie non è determinabile a priori sulla circonferenza-bordo del disco di convergenza $|z - z_0| = R$, ove è necessario analizzare caso per caso.

Per il calcolo del raggio di convergenza R risultano utili le seguenti formule:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|;$$

$$\text{formula di Cauchy-Hadamard : } \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Sviluppi notevoli centrati nell'origine

Si supponga $z_0 = 0$ per semplicità di scrittura.

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} && \text{ha } R = +\infty \\
 \sin z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} && \text{ha } R = +\infty \\
 \cos z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} && \text{ha } R = +\infty \\
 \sinh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{ha } R = +\infty \\
 \cosh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} && \text{ha } R = +\infty \\
 \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n && \text{ha } R = 1 \text{ e non converge sul bordo}
 \end{aligned}$$

Serie prodotto

Il prodotto di due serie si può scomporre come:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \quad \text{con } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

La serie prodotto converge se e solo se almeno una delle due serie originali converge assolutamente.