

Matteo Campagnoli

APPUNTI DI

**METODI ANALITICI
E NUMERICI PER LE EDP**

fubini ⊗ tonelli
edizioni e convoluzioni

Appunti di Metodi Analitici e Numerici per le EDP

© L'autore, alcuni diritti riservati

Quest'opera è rilasciata sotto licenza CC BY-NC-SA 4.0.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

In sintesi: potete condividere i contenuti del libro, in tutto o in parte, e apportare le vostre modifiche, a patto di citare la fonte, di condividere le modifiche con la stessa licenza, e di non usare il materiale per scopi commerciali (non è permesso stampare il libro per rivenderlo).

Il codice **MATLAB** e le figure presenti nel libro sono disponibili su
<https://github.com/fubinitonelli/metodi-edp-script>

DOCUMENTO CREATO IL 28 GENNAIO 2025

REVISIONE 97a061c6cb049b9427d23dd48e46583abaa228dc

Developed by Matteo Campagnoli - matteo@fubinitonelli.it

Powered by Fubini ⊗ Tonelli

Per segnalare eventuali errori o suggerimenti potete contattare l'autore.

Ringraziamenti

Ci sono varie ragioni per cui questo progetto è nato, prima fra tutte il grande interesse suscitato in me dalla materia. Non avevo mai trattato le equazioni differenziali alle derivate parziali, argomento che di per sé incute un certo timore. Sono bastate poche settimane di corso per trasformare quella paura iniziale in un crescente interesse, fino a diventare una vera e propria passione. Questa evoluzione non sarebbe stata possibile se dall'altra parte della cattedra non ci fossero state due persone estremamente competenti e capaci: il Professor Marco Bramanti e il Professor Paolo Zunino. A loro vanno i miei più sentiti ringraziamenti per l'ottimo corso che hanno messo in piedi, che ogni anno fa appassionare decine di studenti come il sottoscritto a questa disciplina.

Il secondo doveroso ringraziamento va a tutto il team di *Fubini* \otimes *Tonelli* e in particolare al presidente Bruno Guindani. Grazie al loro supporto, questi appunti sono passati dall'essere un semplice documento mal formattato ad un vero e proprio libro. Una menzione d'onore la merita Teo Bucci: padre spirituale di questo progetto, revisore contenutistico e stilistico; il suo entusiasmo e la sua voglia di fare mi hanno accompagnato dalla prima all'ultima pagina.

In conclusione, rivolgo un ringraziamento particolare a Federico Riva, grande amico e primo ad utilizzare questi appunti per preparare l'esame, e a quel professore di fisica a me molto caro, che fin da bambino mi ha trasmesso la curiosità e l'interesse per la matematica.

Questo testo è frutto di una rielaborazione personale di appunti presi durante il corso di Metodi Analitici e Numerici per le EDP. Non si pone in alcun modo come sostituto ad un libro di testo né alle lezioni dei docenti. Il materiale non è stato sottoposto a revisione da parte dei docenti del corso e potrebbe contenere errori.

Prefazione

Sono passati ormai otto anni da quando un gruppo di stralunati decise di mettersi a lavorare insieme su un *progettino* di appunti in \LaTeX , che con il passare del tempo diventava sempre meno *ino*. Due anni dopo, nacque ufficialmente l'Associazione Fubini-Tonelli, fondata da quegli stessi stralunati. Lungo la strada abbiamo lavorato a tanti progetti, incontrato tanti studenti che li hanno usati, e conosciuto tante nuove persone talentuose che ci hanno contattato per svilupparne altri ancora. A nome della Fubini \otimes Tonelli, ringrazio Matteo, l'ultima aggiunta tra queste nuove persone talentuose. Ringrazio in particolare anche Teo Bucci, che ha contribuito in modo decisivo al perfezionamento del libro che state leggendo. Infine, ringrazio (potrei non farlo?) tutti i membri dell'associazione per aver creato qualcosa a cui queste persone talentuose volessero partecipare. Siamo orgogliosi di aver lasciato la nostra piccola impronta nel nostro piccolo intorno di mondo.

Bruno Guindani, presidente dell'associazione Fubini \otimes Tonelli

*An idea which can be used only once is a trick.
If one can use it more than once it becomes a method.*

George Pólya

Indice

0	Richiami di Analisi Funzionale	1
1	Equazione di Laplace e Poisson	5
1.1	Condizioni al Contorno	6
1.2	Laplaciano sul Cerchio	8
1.2.1	Ipotesi di regolarità	10
1.2.2	Problema di Neumann	12
1.2.3	Formulazione Integrale	13
1.3	Problema di Dirichlet sul Semipiano	17
1.3.1	Nuclei regolarizzanti	18
1.4	Equazione di Poisson nello Spazio	20
1.5	Equazione di Poisson su un Dominio Limitato	24
1.5.1	Funzione di Green	24
1.6	Proprietà delle Funzioni Armoniche	26
2	Equazione del Calore	31
2.1	Unicità della Soluzione	32
2.2	Equazione del Calore sul Segmento	34
2.3	Problema di Cauchy-Neumann	38
2.4	Problema di Cauchy Globale	40
2.5	Equazione del Calore Non Omogenea	42
3	Equazione del Trasporto Lineare	47
3.1	Caso Omogeneo e Non Omogeneo	47
3.2	Termine di Reazione e Andamento per Tempi Lunghi	49
3.3	Soluzione Debole	50
4	Equazione delle Onde	53
4.1	Corda Vibrante	54
4.2	Corda Vibrante Illimitata	57
4.3	Soluzione Debole	60
4.4	Equazione delle Onde in Dimensione $n \geq 2$	61

4.5	Problema di Cauchy Globale	65
5	Spazi di Sobolev	71
5.1	Spazi di Sobolev	71
5.2	Spazio duale	75
5.3	Approssimazione con funzioni regolari	77
5.4	Operatore di Traccia	78
6	Problemi Differenziali in Spazi di Hilbert	81
6.1	Problemi Variazionali Astratti	81
6.2	Formulazione Debole di Problemi Uniformemente Ellittici	84
6.3	Problema di Neumann	87
6.4	Equazioni di Diffusione, Trasporto e Reazione	89
6.5	Condizione al bordo non nulla	91
7	Differenze Finite per l'Equazione di Poisson	95
7.1	Equazione di Poisson Monodimensionale	96
7.2	Consistenza, Stabilità e Convergenza	99
8	Differenze Finite per l'Equazione del Calore	103
8.1	Assoluta stabilità	106
8.2	Consistenza	107
9	Differenze Finite per l'Equazione del Trasporto	111
9.1	Schemi di Lax-Wendroff e Lax-Friedrichs	113
9.2	Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy	115
9.3	Convergenza	119
9.4	Inflow e Outflow	121
10	Metodo di Galerkin	123
10.1	Metodo agli Elementi Finiti	124
10.2	Analisi del Metodo di Galerkin	127
10.3	Problema di Dirichlet Non Omogeneo	132
11	Equazioni di Diffusione e Trasporto	135
11.1	Formulazione Variazionale	137
11.2	Instabilità e Numero di Péclet	139
11.3	Metodo della Diffusione Artificiale	142
	Indice Analitico	147

Elenco delle figure

1.1	Equazione di Laplace sul cerchio	10
1.2	Nucleo di Gauss e Poisson	19
2.1	Equazione del Calore su tutto \mathbb{R}	42
7.1	Convergenza metodo ghost node	100
8.1	Equazione del Calore con Eulero Avanti	109
9.1	Condizione CFL	116
9.2	Condizioni di inflow e outflow	121
10.1	Basi lagrangiane	125
11.1	Soluzione analitica in dipendenza dal rapporto β/ε	136
11.2	Numero di Péclet e instabilità	141

Capitolo 0

Richiami di Analisi Funzionale

Dato un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, lo spazio delle funzioni continue $\mathcal{C}(\overline{\Omega})^1$ è un classico esempio di spazio di Banach, rispetto alla *norma del massimo* $\|f\| = \max_{\overline{\Omega}} |f(x)|$. L'esistenza del massimo è garantita dal teorema di Weierstrass, essendo $\overline{\Omega}$ compatto. Anche l'insieme delle funzioni continue nulle all'infinito $\mathcal{C}_*^0(\mathbb{R})$, rispetto alla norma $\|f\| = \sup |f(x)|$, è uno spazio di Banach. Questo, invece, non vale per l'insieme delle funzioni a supporto compatto $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, per quanto sia in esso contenuto. Tra gli spazi $L^p(\Omega)$ delle funzioni integrabili secondo Lebesgue, un ruolo particolarmente importante è ricoperto dal caso $p = 2$. Infatti, per la disuguaglianza di Hölder,² su $L^2(\Omega)$ è possibile introdurre un prodotto scalare definito come

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) \, dx$$

che induce la norma $\|f\|_2$. Rispetto a questa norma, lo spazio è completo, quindi $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Anche il suo equivalente discreto è particolarmente importante: $\ell^2(\Omega)$ l'insieme delle successioni quadrato sommabili.

Teorema 0.0.1. *Dati X, Y spazi vettoriali normati, sia T un operatore lineare $T: X \rightarrow Y$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. *T è continuo nell'origine: data $x_n \rightarrow 0$ in X si ha $Tx_n \rightarrow 0$ in Y*
2. *T è continuo: data $x_n \rightarrow x$ in X , si ha $Tx_n \rightarrow Tx$ in Y*
3. *L'estremo superiore del rapporto*

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty \tag{0.0.1}$$

¹Ricordiamo che con la notazione $\overline{\Omega}$ intendiamo la *chiusura* dell'insieme, ovvero $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

²Reminder importante del corso di Analisi III: dati p, q esponenti coniugati, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ allora $fg \in L^1(\Omega)$. Per ulteriori dettagli, cercate sul vostro motore di ricerca preferito.

In modo equivalente, ma forse più agevole nella pratica, la terza condizione si può pensare come: esiste $M > 0$ tale che $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

Un operatore lineare T per cui valga una, e quindi tutte, delle proprietà di cui sopra si dice *continuo* o *limitato*. I due termini sono equivalenti, perché si dimostra che un operatore lineare è continuo se e solo se limitato. La (0.0.1) definisce la *norma dell'operatore* $\|T\|$. Questa costruzione permette di poter introdurre una struttura normata sull'insieme di tutti gli operatori lineari tra due spazi vettoriali normali $\mathcal{L}(X, Y)$.

Alla luce di questa definizione, possiamo identificare l'operatore di convoluzione $f * g$ come un operatore lineare continuo tra due spazi funzionali.

Teorema 0.0.2 (di Young). *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, allora la loro convoluzione è ben definita, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|f * g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. In generale, se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, con $p = [1, \infty]$, allora $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ e $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$*

Tra tutti i possibili operatori lineari continui, siamo particolarmente interessati ai *funzionali*, ovvero gli operatori della forma $T : X \rightarrow \mathbb{R}$, aventi come insieme di arrivo i numeri reali. L'insieme di tutti i funzionali lineari continui $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ viene chiamato *spazio duale* ed è uno spazio di Banach.

Possiamo chiederci quanto è *popoloso* lo spazio duale di un dato spazio normato X . Spazi di funzioni molto regolari, come $C^0([0, 1])$ ammettono una lunga lista di funzionali, mentre spazi meno regolari, come quelli delle funzioni integrabili, ne ammettono meno. A tal proposito, consideriamo $X = L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Fissiamo una funzione $g \in L^q(\Omega)$, con q esponente coniugato a p . Allora, per la disuguaglianza di Hölder $fg \in L^1(\Omega)$ e vale

$$\left| \int_{\Omega} fg \, dx \right| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Fissata $g \in L^q(\Omega)$, siamo portati a pensare all'integrale di cui sopra come all'applicazione di un funzionale $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, lineare rispetto a f e continuo per la disuguaglianza appena scritta; infatti, $|Tf| \leq C\|f\|_p$, dove la costante è proprio la norma q di g . T appartiene allo spazio duale $(L^p(\Omega))^*$ e la sua norma, nel senso della (0.0.1) vale esattamente $\|T\| = \|g\|_q$. Per p, q coniugati, ogni funzione $g \in L^q(\Omega)$ definisce univocamente un funzionali lineare continuo su $L^p(\Omega)$. Esistono altri funzionali su questo spazio? La risposta è no.

Teorema 0.0.3 (di Rappresentazione di Riesz I). *Sia $1 < p < \infty$ e $T \in (L^p(\Omega))^*$, allora esiste un'unica funzione $g \in L^q(\Omega)$, con p e q coniugati, tale che*

$$Tf = \int_{\Omega} fg \, dx \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

Quindi, qualsiasi funzionale lineare continuo è unicamente caratterizzato come integrale fg . Lo spazio duale $(L^p)^*$ e lo spazio L^q sono in corrispondenza biunivoca, scriviamo $(L^p)^* \cong L^q$. Prendiamo il caso particolare $p = 2$, che ha come esponente coniugato se stesso. Quindi, L^2 si identifica con il suo duale.

Questa caratteristica non è del solo spazio L^2 , ma in generale di tutti gli spazi di Hilbert. Infatti, sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Fissiamo $v \in \mathcal{H}$ e definiamo il funzionale lineare $T : u \rightarrow \langle v, u \rangle$. Allora

$$|Tu| = |\langle v, u \rangle| \leq \|v\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}} = C \|u\|_{\mathcal{H}} \implies T \text{ continuo}$$

Come prima, ci chiediamo se esistono altri funzionali. La risposta viene da un altro teorema di Riesz.

Teorema 0.0.4 (di Rappresentazione di Riesz II). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. Per ogni $T \in \mathcal{H}^*$, esiste un unico $v \in \mathcal{H}$ tale che $Tu = \langle v, u \rangle$, per ogni $u \in \mathcal{H}$. Inoltre, $\|T\|_{\mathcal{H}} = \|v\|_{\mathcal{H}}$.*

Concludiamo la sezione con alcuni importanti risultati di calcolo a più variabili. In primis, consideriamo un aperto connesso $\Omega \in \mathbb{R}^n$, che chiameremo *dominio*. Siamo interessati ai domini sufficientemente regolari, in particolare ai domini di classe \mathcal{C}^1 , che sono localmente il grafico di una funzione $\varphi \in \mathcal{C}^1$, e i domini lipschitziani, che localmente coincidono con una funzione di Lipschitz. Questi ultimi, più generali dei primi, possono avere un numero finito di punti angolosi.

Teorema 0.0.5 (della Divergenza). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e lipschitziano, sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe $F \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Allora*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n_e \, d\sigma$$

Consideriamo due campi scalari $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Consideriamo

$$\nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\nabla \cdot \nabla u = \nabla v \cdot \nabla u + v\nabla^2 u$$

Integriamo sul dominio Ω e applichiamo il teorema della divergenza, ottenendo la **prima identità di Green**

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + v\nabla^2 u \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v\nabla u) \, dx = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot n_e \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n_e} \, d\sigma$$

Questa espressione non è simmetrica rispetto all'inversione di u, v . Tuttavia, scambiamo u con v e sottraendo le due espressioni ottenute si ottiene la **seconda identità di Green**

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n_e} - u \frac{\partial v}{\partial n_e} \, d\sigma = \int_{\Omega} v\nabla^2 u - u\nabla^2 v \, dx$$

Capitolo 1

Equazione di Laplace e Poisson

L'equazione di Poisson, e la sua variante omogenea dedicata a Laplace, appare spesso nello studio di fenomeni fisici stazionari, che non dipendono dal tempo. Storicamente, la sua prima apparizione è avvenuta nell'ambito della teoria del potenziale elettrostatico: sia \mathbf{E} il campo elettrostatico generato da una distribuzione di carica continua nello spazio, con densità $\rho = \rho(x)$. Applicando il teorema di Gauss si ottiene la prima equazione Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k\rho(x)$. Ma il campo elettrostatico è conservativo, quindi esiste un potenziale tale che $\mathbf{E} = \nabla\varphi$, da cui

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = 4\pi k\rho(x)$$

Gli stessi procedimenti valgono anche per il campo gravitazionale. Consideriamo un fluido incomprimibile con campo di velocità v , per il quale $\nabla \cdot v = 0$. Supponiamo che il moto sia non vorticoso, ovvero $\nabla \times v = 0$. Sotto opportune condizioni che assumiamo soddisfatte, un campo irrotazionale è anche conservativo, quindi esiste un potenziale ψ per il quale $\nabla^2\psi = 0$, ritrovando nuovamente l'equazione di Laplace. Questa equazione compare spesso nello studio di fenomeni stazionari, come la conduzione del calore o la vibrazione di una membrana quando il sistema ha raggiunto uno stato di equilibrio.

Infine, l'equazione di Laplace, le cui soluzioni sono chiamate *funzioni armoniche*, è strettamente legate alla teoria delle funzioni olomorfe di variabile complessa. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funzione olomorfa, allora parte reale e immaginaria soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Le funzioni olomorfe sono infinitamente derivabili, quindi in particolare $u, v \in \mathcal{C}^2$. Derivando nuovamente la parte reale rispetto a x , o in modo analogo la parte immaginaria rispetto a y , si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

Parte reale e immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni analitiche. Vale, in realtà, una condizione più forte: le funzioni analitiche sono tutte e sole le parti reali e immaginarie di funzioni olomorfe. Un caso decisamente importante, che sarà utile in seguito, riguarda la funzione olomorfa $f(z) = z^n = (x + iy)^n$. In coordinate polari parte reale e parte immaginaria sono $u_n = \rho^n \cos(n\theta)$ e $v_n = \rho^n \sin(n\theta)$. Queste funzioni sono chiamate *armoniche elementari del piano*.

1.1 Condizioni al Contorno

Affinché un problema alle derivate parziali sia ben determinato è necessario imporre delle condizioni sulla forma della funzione incognita sul bordo del dominio. Queste prendono il nome di condizioni al contorno e si distinguono in

- Condizione di Dirichlet: Imponiamo che sul bordo la soluzione valga una certa funzione, ovvero $u(x) = g(x)$ per $x \in \partial\Omega$
- Condizione di Neumann: Si impone che la derivata normale della soluzione sia uguale ad una funzione data, $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ per $x \in \partial\Omega$
- Condizione mista: su una sezione di bordo Σ_1 imponiamo una condizione di Dirichlet, mentre sulla porzione Σ_2 imponiamo una condizione di Neumann. Per evitare contrasti, le due porzioni devono essere disgiunte e $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial\Omega$
- Condizione di Robin: Presa α una costante strettamente positiva e g funzione data, si impone che sul bordo $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \tag{1.1.1}$$

Questa condizione deriva da situazioni termodinamiche stazionarie, in cui $u(x)$ rappresenta la temperatura e $\partial u / \partial n$ il flusso di calore con l'ambiente esterno. Per questioni di bilancio, la somma di queste due quantità deve essere uguale alle sorgenti di calore.

Teorema 1.1.1 (di Unicità). *Sia Ω un dominio limitato e lipschitziano, allora nella classe di funzioni $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ per il problema di Dirichlet, misto e di Robin la soluzione se esiste è unica. Per il problema di Neumann, se la soluzione esiste è unica a meno di una costante additiva.*

Dimostrazione. Siano $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ due soluzioni dello stesso problema. Consideriamo la differenza $u = u_1 - u_2$, che vive nel loro medesimo spazio

$$\nabla^2 u = \nabla^2(u_1 - u_2) = f - f = 0 \implies \nabla^2 u = 0$$

dove f è il dato al bordo. La u su $\partial\Omega$ soddisfa la stessa tipologia di condizioni di u_1 e u_2 , avendo però come dato al bordo $g = 0$. Applichiamo la prima identità di Green alle funzioni $u = v$, tenendo però a mente che questa richiede $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, una regolarità più forte di quella ipotizzata; di questa questione ci occuperemo in seguito

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \nabla^2 u \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \end{aligned}$$

In quest'ultima equazione non compaiono derivate seconde, quindi ha senso anche solo per $u \in C^1(\overline{\Omega})$; anche su questo punto si farà chiarezza alla fine. Distinguiamo adesso le varie tipologie di problemi al contorno.

Dirichlet: per ipotesi $u = 0$ sul bordo $\partial\Omega$. Il termine destro si annulla, quindi anche l'integranda di sinistra $\nabla u = 0$. Questo significa che u deve necessariamente essere costante su tutto il dominio $\overline{\Omega}$; ma avendo già imposto sul bordo $u = 0$, non rimane che concludere che $u = 0$ ovunque.

Neumann: per ipotesi $\partial u / \partial n = 0$ sul bordo $\partial\Omega$, quindi il termine destro si annulla, da cui $\nabla u = 0$, quindi $u = \text{costante}$.

Misto: Spezziamo il bordo in due sezioni disgiunte $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, per l'additività dell'integrale

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0$$

Adesso valgono le stesse considerazioni del problema di Dirichlet, essendo $u = 0$ su Σ_1 .

Robin: Partendo dalla condizione $u \partial u / \partial n = -\alpha u$ si sostituisce

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} -\alpha u^2 \, d\sigma = -\alpha \int_{\partial\Omega} u^2 \, d\sigma \leq 0$$

Quindi anche il termine di sinistra, che battezziamo A , deve essere non positivo $A \leq 0$. Ma A è l'integrale di una quantità positiva, allora $A = 0$ e u costante. Ma se u costante, la sua derivata direzionale verso n è nulla, da cui per la condizione di Robin $u = 0$ su $\overline{\Omega}$.

Rimane da fare chiarezza sull'utilizzo, apparentemente ingiustificato, della prima identità di Green, in assenza delle ipotesi necessarie. Consideriamo una successione di domini limitati lipschitziani, crescenti $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1}$ e contenuti con compattezza in Ω tali che

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$$

Adesso, possiamo affermare che $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}_k)$ e quindi possiamo applicare la prima identità di Green. Dopo aver cancellato l'integrale del laplaciano, unico termine che richiede $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}_k)$, possiamo far tendere $k \rightarrow \infty$. \square

Consideriamo il problema di Neumann per l'equazione di Laplace, $\nabla^2 u = 0$, con soluzione in $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ e condizione al contorno $\partial u / \partial n = g$. Per il teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 u \, dx &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n_e \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0 \\ &\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0 \end{aligned}$$

Questa è una condizione di compatibilità sul dato g ; se questa non è soddisfatta, il problema di Neumann non ammette soluzione. In termini termodinamici, questa equazione esprime il bilancio tra calore uscente e calore entrante alla frontiera di un corpo, in assenza di sorgenti di calore.

1.2 Laplaciano sul Cerchio

Consideriamo l'equazione di Laplace nel caso bidimensionale, sul dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r\}$, che rappresenta un cerchio nel piano. Occupiamoci di risolvere il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, y) = f(x, y) \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Per prima cosa, passiamo a coordinate polari $(\rho, \theta) \in [0, r] \times [0, 2\pi)$. L'equazione di Laplace diventa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.2.2)$$

mentre la condizione al contorno $u(r, \theta) = f(\theta)$, dove rimane una funzione della sola variabile θ . Procediamo con la *tecnica di separazione di variabili*, in cui cerchiamo soluzioni della forma $u(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$. A priori, non sappiamo se questa espressione rappresenta tutte le soluzioni possibili. Sappiamo però che, sotto determinate condizioni, la soluzione è unica, quindi se troviamo una soluzione con la tecnica di separazione di variabili, possiamo essere sicuri che questa sia quella giusta. Riscriviamo l'equazione di Laplace in termini di R, Θ

$$\begin{aligned} R''(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Theta''(\theta) &= 0 \\ \rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} &= -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \end{aligned}$$

Il termine sinistro dipende unicamente dalla variabile ρ , mentre quello destro da θ , quindi concludiamo che sono entrambi costanti e pari a un generico λ .

$$\begin{aligned}\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) &= 0 \quad \rho \in [0, r) \\ \Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) &= 0 \quad \theta \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

Partiamo dall'equazione per $\Theta(\theta)$: questa è un'equazione ordinaria del secondo ordine, le cui soluzioni dipendono dal segno di λ , che è esso stesso un'incognita del problema. Per questioni di simmetria, imponiamo che $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$, altrimenti la soluzione risulterebbe discontinua. L'unica tipologia di soluzioni 2π -periodica è quella per $\lambda > 0$, il classico oscillatore armonico. Poniamo $\lambda^2 = n$

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

L'equazione per $R(\rho)$ con $\lambda = n^2 \neq 0$ è un'equazione di Eulero, le cui soluzioni vanno ricercate nella forma $R(\rho) = \rho^\alpha$. Derivando e sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned}\rho^2 \alpha(\alpha - 1) \rho^{\alpha-2} + \alpha \rho \rho^{\alpha-1} - n^2 \rho^\alpha &= 0 \\ \rho^\alpha [\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2] &= 0 \implies \alpha = \pm n \quad R(\rho) = c_1 \rho^n + c_2 \rho^{-n}\end{aligned}$$

Rimane da discutere il $n = 0$: l'equazione perde il termine di ordine zero; attraverso la sostituzione $v = R'(\rho)$ si abbassa ulteriormente l'ordine

$$\rho v'(\rho) + v(\rho) = 0 \implies v(\rho) = \frac{d_1}{\rho} \implies R(\rho) = d_2 + d_1 \log(\rho)$$

Tutti questi coefficienti sarebbero a priori da determinare; tuttavia, ci aspettiamo che la soluzione sia limitata all'interno del dominio, in particolare nell'origine $\rho = 0$. Quindi poniamo a zero tutti i coefficienti dei termini illimitati nell'origine $c_2 = d_1 = 0$. Moltiplichiamo le due componenti e rinominiamo i coefficienti in modo da ottenere

$$u_n(\rho, \theta) = \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (1.2.3)$$

Per linearità, qualsiasi somma finita di queste soluzioni soddisfa ancora l'equazione di Laplace. Cerchiamo di soddisfare la condizione al contorno utilizzando una serie infinita

$$u(\rho, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (1.2.4)$$

Supponiamo di poter scrivere il dato al bordo $f(\theta)$ in serie di Fourier, successivamente discutere le ipotesi che giustificano questo punto, allora deve essere

$$u(r, \theta) = f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)$$

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2} \quad r^n a_n = \alpha_n \quad r^n b_n = \beta_n$$

dove α_n, β_n sono i coefficienti di Fourier del dato al bordo $f(\theta)$. Abbiamo così ottenuto una *candidata* soluzione al problema di Dirichlet sul cerchio; bisogna ancora studiare quali condizioni deve verificare $f(\theta)$ affinché la soluzione sia effettivamente corretta.

$$u(\rho, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \quad (1.2.5)$$

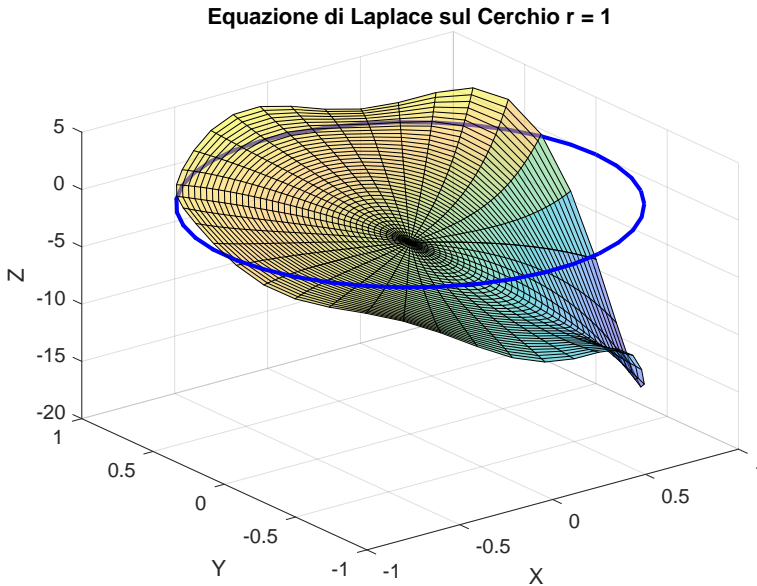


Figura 1.1: Soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$

1.2.1 Ipotesi di regolarità

Studiamo ora quali ipotesi di regolarità deve soddisfare il dato al bordo $f(\theta)$ affinché la (1.2.5) sia effettivamente la soluzione. Supponiamo che $f \in L^1(0, 2\pi)$, allora i coefficienti di Fourier esistono e sono tali che